



# Simulation numerique d'un probleme parabolique non lineaire : trempe d'un barreau metallique

Paul-Louis George

## ► To cite this version:

Paul-Louis George. Simulation numerique d'un probleme parabolique non lineaire : trempe d'un barreau metallique. RR-0146, INRIA. 1982. inria-00076414

**HAL Id: inria-00076414**

**<https://hal.inria.fr/inria-00076414>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél: 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 146

**SIMULATION NUMÉRIQUE  
D'UN PROBLÈME PARABOLIQUE  
NON LINÉAIRE :  
TREMPE D'UN BARREAU  
MÉTALLIQUE**

**Paul Louis GEORGE**

**Juillet 1982**

SIMULATION NUMERIQUE D'UN PROBLEME PARABOLIQUE  
NON LINEAIRE : TREMPE D'UN BARREAU METALLIQUE

---

Paul Louis GEORGE

Juin 1982



### Résumé :

Dans cet article nous étudions le champ des températures dans la section d'un barreau métallique chauffé à  $800^{\circ}\text{C}$  et plongé dans un fluide réfrigérant.

Les coefficients thermiques dépendent de la température et varient de manière très brutale.

Ce type de non linéarité est difficile à traiter, aussi nous avons procédé en trois étapes : un premier cas avec des données régulières ensuite avec des paramètres plus raides puis dans un cas très raide.

Deux sortes de méthodes sont mises en oeuvre pour résoudre ce problème parabolique non linéaire : i) les méthodes multipas à pas fixe avec une linéarisation par point fixe.

ii) la méthode de Gear qui adapte le pas de temps et l'ordre en fonction de la raideur de  $u$  et linéarise le problème.

Nous donnons quelques propriétés intéressantes des méthodes et nous les comparons. Certaines améliorations sont suggérées.

### Abstract :

In this paper we study the distribution of a heat field from a cross section of a metal bar heated to  $800^{\circ}\text{C}$  and dropped into a cooling fluid.

The thermal parameters are dependent on the temperature  $u$  and vary very quickly with respect to  $u$ .

This kind of non linearity is very difficult to solve so we consider three steps : first a study with smooth data, then with stiffer coefficients and at last in a very stiff case.

Two kinds of methods are used to compute this parabolic non linear problem : i) multistep method with fixed step size and fixed point algorithm.

ii) Gear method which adaptes step size and order to the stiffness of  $u$  and linearises automatically.

Different properties and comparisons are pointed out and some improvements are suggested.

## I. Description du problème :

Ce problème nous a été communiqué par J.C. Métral [0].

On étudie le phénomène de refroidissement brutal d'un barreau métallique plongé dans un fluide réfrigérant. Ce fluide dont la température est  $100^{\circ}\text{C}$  est, par exemple, un mélange d'air et d'eau. Le barreau est un acier dont la température initiale est  $800^{\circ}\text{C}$  et dont les caractéristiques physiques sont les coefficients  $\rho_c$  et  $k$  donnés.

Ce barreau est un cylindre tridimensionnel régulier. Par symétrie, seule l'étude du quart d'une coupe bidimensionnelle est considérée (figure 1).

$$\begin{aligned} h &= 7.62 \\ l &= 6.35 \end{aligned}$$

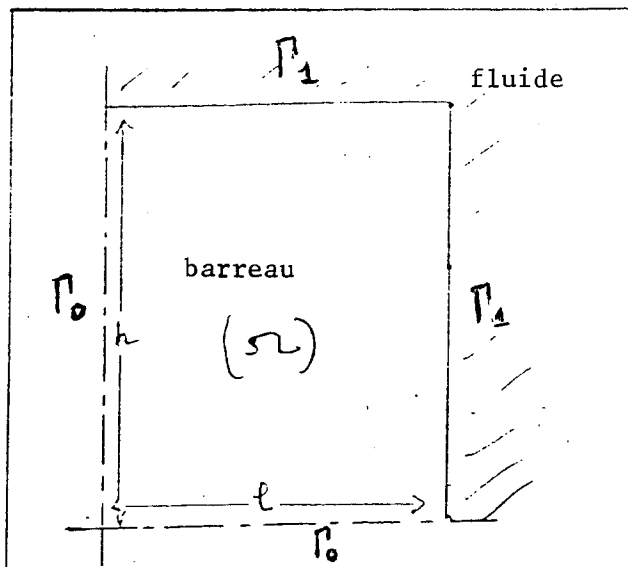


Figure 1.

## II Modélisation du problème

On modélise le problème de refroidissement par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_c(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}[k(u) \text{grad } u] = 0 & \text{dans } \Omega \\ k(u) \frac{\partial u}{\partial n} = \phi(u) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u(t_0) = u_0 & \text{pour } t = t_0 \end{array} \right.$$

Ce problème dépend des constantes du matériau :

$$\rho_c(u) \text{ et } k(u)$$

et du terme de source  $\phi(u)$ .

Ces trois données dépendent de la solution  $u$ , ainsi le problème à résoudre est non linéaire. De plus ces 3 coefficients varient plus ou moins brutalement en fonction de  $u$ . La figure 2 donne l'allure qualitative de ces fonctions (en abscisse la température).

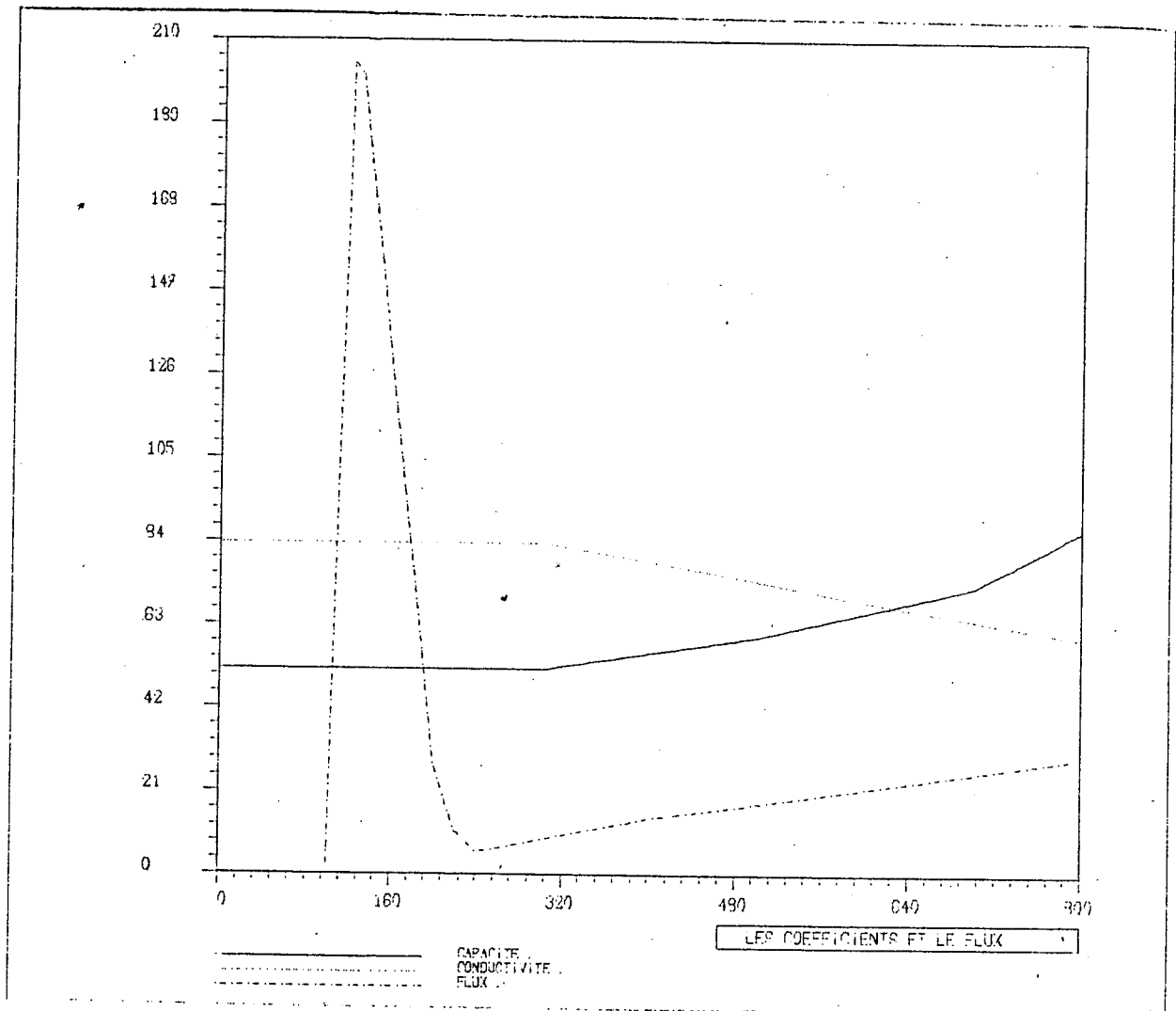


Figure 2.

Remarques :

La variation des fonctions  $\rho_c$  et  $k$  reste "raisonnable" alors que  $\phi$  présente une variation brutale.

La forme de la courbe  $\phi$  est due au fait qu'un nuage de vapeur se forme au départ entre le fluide et le barreau formant un écran protecteur. Quand cette couche disparaît le barreau est brutalement soumis au réfrigérant. L'étude du champ de températures permettra de connaître les caractéristiques du matériau.

Les échelles sont différentes pour les 3 courbes.

### TREMPE : 3

Les difficultés de résolution de ce problème nous ont amené à procéder en 3 étapes :

#### Etape 1 :

On considère  $\rho_c$  et  $k$  comme des constantes (une valeur moyenne étant choisie) et seul le flux varie de manière peu brutale.

#### Etape 2

Les coefficients  $\rho_c$  et  $k$  sont toujours constants et on fait varier le flux de plus en plus brutalement.

#### Etape 3 :

On s'intéresse maintenant au problème tel quel, c'est-à-dire que  $\rho_c$ ,  $k$  et  $\phi$  sont les fonctions représentées sur la figure 2.

Les étapes 1 et 2 nous permettent d'étudier le comportement des méthodes numériques de résolution, de les affiner et d'en choisir les meilleures plages d'utilisation. Avec ces premières conclusions nous traiterons le problème de l'étape 3.

### III. Méthodes de résolution

Le travail est fait dans le cadre du Club MODULEF [1] où l'on dispose pour résoudre ces problèmes paraboliques non linéaires de deux types de méthodes :

- i) les méthodes multipas sous forme classique à pas constant
- ii) la méthode automatique de Gear avec contrôle de l'erreur locale.

Nous rappelons ci-dessous brièvement ces méthodes;

#### 3.1. Méthodes multipas classiques :

##### 3.1.1. Présentation sur une équation différentielle :

On cherche la fonction  $y(t)$  telle que :

$$(3.1) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \text{pour } t \in I = [t_0, t_m] \\ y(0) = y_0 & \text{donné pour } t = t_0 \end{cases}$$

# TREMPE : 4

on se donne :  $\Delta t$  un pas de temps fixe.

la suite  $t_n = t_{n-1} + \Delta t$

les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i = 0$  à  $q$  où  $q$  est le nombre de pas. Ces coefficients définissent la méthode : son ordre, sa précision, sa stabilité [2].

on note  $y_n$  la solution, calculée par le schéma, qui approche  $y(t_n)$ .

soit  $f_n \approx f(t_n, y_n)$

le schéma s'écrit :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^q \alpha_i y_{n+i} = \Delta t \sum_{i=0}^q \beta_i f_{n+i} \\ y_0 \text{ connu.} \end{cases}$$

## 3.1.2. Application à un problème parabolique

Après discrétisation en espace par la M.E.F. [3] [4] [5], on obtient le système :

$$(3.3) \quad \begin{cases} M u' + K u = F \\ u(0) = u_0 \quad \text{pour } t = t_0 \end{cases}$$

où

$M$  est la matrice de masse

$K$  la matrice de rigidité

$F$  le second membre.

On calcule alors  $u_n$  qui approche  $u(t_n)$  par le schéma :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^q \alpha_i M u_{n+i} = \Delta t \sum_{i=0}^q \beta_i (F_{n+i} - K u_{n+i}) \\ u_0 \text{ connu} \end{cases}$$

On généralise ce schéma au cas où  $M$ ,  $K$  et  $F$  dépendent du temps et de la solution  $u$  par :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^q \alpha_i u_{n+i} = \Delta t \sum_{i=0}^q \beta_i M_{n+i}^{-1} (F_{n+i} - K_{n+i} u_{n+i}) \\ u_0 \text{ connu} \end{cases}$$

où l'on note :  $M_{n+i} = M(t_{n+i}, u_{n+i})$  (resp.  $K_{n+i}, F_{n+i}$ ).



Le système à résoudre s'écrit donc :

$$(\alpha_q M_{n+q} + \Delta t \beta_q K_{n+q}) u_{n+q} = F_{n+q}$$

$$\text{avec } F_{n+q} = M_{n+q} \sum_{i=0}^q \Delta t \beta_i M_{n+i}^{-1} (F_{n+i} - K_{n+i} u_{n+i}) + \Delta t \beta_q F_{n+q}$$

Comme  $M_{n+q}$  (respect.  $K_{n+q}$ ,  $F_{n+q}$ ) dépend de  $u_{n+q}$  on est amené à linéariser le problème :

i) linéarisation simple :

On pose  $M_{n+q} = M(t_{n+q}, u_{n+q-1})$  idem pour  $K_{n+q}$  et  $F_{n+q}$

ii) linéarisation par une méthode de point fixe :

On pose  $M_{n+q}^m = M(t_{n+q}, u_{n+q}^m)$  pour  $m = 0, 1, 2, \dots$

avec  $u_{n+q}^0 = u_{n+q-1}$

de même pour  $K$  et  $F$ , ceci permet le calcul de  $u_{n+q}^{m+1}$

Le processus itératif est mené tant que :

$$||u_{n+q}^{m+1} - u_{n+q}^m|| \leq \varepsilon \quad , \text{ une norme étant choisie, pour } \varepsilon \text{ donné.}$$

### 3.2. Méthode automatique de Gear

#### 3.2.1. Présentation sur une équation différentielle :

Pour résoudre le système (3.1) on utilise 2 méthodes multipas du type (3.2), l'une explicite, l'autre implicite. Voir [5] [6] [7] [8].

$$(3.6) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^q \alpha_i y_{n+i} = \Delta t \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i f_{n+i} \\ \sum_{i=0}^q \alpha_i^* y_{n+i} = \Delta t \sum_{i=0}^q \beta_i^* f_{n+i} \\ y_0 \text{ connu} \end{cases}$$

Le schéma est mis sous forme prédicteur correcteur de la manière suivante :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_q y_{n+q}^o = \Delta t \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i f_{n+i} - \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i y_{n+i} \\ \alpha_q^* y_{n+q}^{m+1} = \Delta t \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i^* f_{n+i} + \Delta t \beta_q^* f_{n+q}^m - \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i y_{n+i} \quad m=0,1,2,\dots \\ \text{avec } y_{n+q}^o \text{ solution de la méthode prédicteur.} \end{array} \right.$$

Remarquons que  $f_{n+q}^m = f(t_{n+q}, y_{n+q}^m)$

Pour une méthode multipas quelconque on sait que l'erreur locale a pour partie principale :  $C_{p+1} \Delta t^{p+1} |y_n^{(p+1)}|$  où  $C_{p+1}$  dépend des coefficients :  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Dans le cas du couplage (3.7), l'erreur locale est celle correspondant à la méthode correcteur lorsque celle-ci a convergée.

Le couplage (3.7) est réécrit différemment de manière à évaluer facilement  $y_n^{(p+1)}$  et par suite pouvoir contrôler l'erreur locale.

Construisant le vecteur :  $Y_n = \{y_n, ty_n', \dots, \frac{\Delta t^p}{p!} y_n^{(p)}\}$  au temps  $t_n$  on écrit (3.7) sous la forme :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_n^o = A Y_{n-1} \\ Y_n^{m+1} = Y_n^m + \ell F(Y_n^m) \end{array} \right.$$

où la matrice  $A$ , le vecteur  $\ell$  et  $F$  se construisent à partir des coefficients de (3.6) et de la fonction  $f$ .

On remarque que :

- i)  $Y_n$  ne dépend que de valeurs au temps  $t_n$  ( $y_n$  et ses dérivées)
- ii) le contrôle d'erreur locale est possible grâce à l'évaluation aisée de  $Y_n^{(p+1)}$  à partir de la dernière composante de  $Y_n$  (et de  $Y_{n-1}$ )

Ceci va permettre, en contrôlant l'erreur locale, de modifier la taille du pas  $\Delta t$ , l'ordre et le nombre de pas de la méthode au cours du calcul. La méthode s'adapte ainsi à la "raideur" du problème à résoudre.

D'un point de vue pratique, on se donne un paramètre  $\varepsilon$  et on cherche à réaliser à chaque pas :  $c_{p+1} \Delta t^{p+1} |y_n^{(p+1)}| \leq \varepsilon$

Si  $\Delta t$  ne convient pas, on le divise par un facteur jusqu'à ce que le test soit vérifié : la prédiction du pas suivant est faite en supposant successivement que :

i) l'ordre  $p$  est maintenu :  $c_{p+1} \Delta t_1^{p+1} |y_n^{(p+1)}| \leq \varepsilon$  nous donne une valeur  $\Delta t_1$  du pas de temps

ii) le calcul est effectué à l'ordre  $p-1$  :

$c_p \Delta t_2^p |y_n^{(p)}| \leq \varepsilon$  nous donne une valeur  $\Delta t_2$  pour le pas.

iii) le calcul est mené à l'ordre  $p+1$  :

$c_{p+2} \Delta t_3^{p+2} |y_n^{(p+2)}| \leq \varepsilon$  nous donne une valeur  $\Delta t_3$  pour le pas

Le maximum des  $\Delta t_i$  est choisi et le pas suivant est calculé avec l'ordre correspondant et pour cette valeur du pas.

En résumé le contrôle de l'erreur permet de choisir la précision désirée. Il influe sur la taille du pas  $\Delta t$ . La variation de ce pas reste néanmoins soumise à des critères plus ou moins empiriques basés sur des remarques de "bon sens" : nous proposons quelques modifications améliorant le "rendement" de la méthode.

### 3.2.2. Application à un problème parabolique

Pour résoudre le problème (3.3) nous adaptons le schéma (3.8) c'est-à-dire que l'on crée le tableau  $U_n = \{u_n, \Delta t u_n', \dots, \frac{\Delta t^{(p)}}{p!} u_n^{(p)}\}$

où  $u_n$  est le vecteur approchant  $u(t_n)$ . On montre dans [5] cette adaptation du système (3.8). En particulier la matrice du système est de la forme :

$(\alpha M + \Delta t \beta K)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients dépendant de ceux de (3.6) tandis que  $\Delta t$  est la valeur actuelle du pas de temps.

La résolution du problème parabolique non linéaire ne pose alors pas de difficulté, de linéarisation. Celle-ci est effectuée automatiquement par la forme prédicteur-correcteur de la méthode.

#### IV. Etape 1 - Comparaison des méthodes :

##### 4.1. Le problème traité (régularisation du problème traité)

On fixe les valeurs  $\rho_c = 3.388614$  (unité  $JL^{-3} K^{-1}$ )

$k = 3.876$  (unité  $JT^{-1} L^{-1} K^{-1}$ )

ainsi les matrices de masse et de rigidité seront constantes. Le flux est donné par la courbe 3.

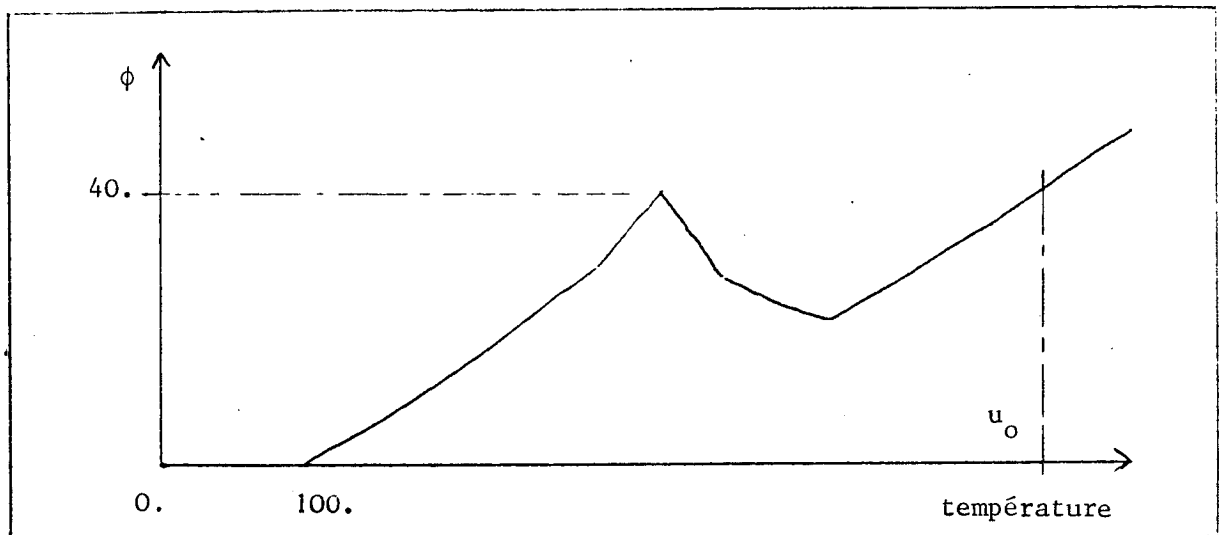


Figure 3.

Le flux présente un léger pic où il atteint la valeur 40. (on notera  $\phi 40$  ce flux)

Une grille  $10 \times 10$  est utilisée ; l'interpolation P1 étant choisie, on dispose de 100 degrés de liberté.

##### 4.2. Amélioration de la méthode de Gear :

On fixe la valeur  $\epsilon = 0.1$  pour le contrôle de l'erreur locale et on s'intéresse à l'influence de trois points sur les résultats et le temps calcul nécessaire :

- i) prendre la matrice de masse pleine ou faire du mass-lumping
- ii) jouer sur le facteur de croissance du pas de temps :  $\alpha$
- iii) jouer sur la fréquence minimale admise entre deux essais de changement de pas :  $f$ .

On suppose que la méthode vient de faire  $f$  pas avec la valeur  $\Delta t$  à l'ordre  $p$ . On autorise alors un changement de la taille du pas (donc éventuellement de l'ordre) selon le critère vu en 3.2.1. Soit  $\alpha$  le coefficient d'amplification du pas.

Suivant [7] on fixe  $f = p+1$ . Nous posons  $\alpha = 4.5$  bien que ce coefficient ne soit pas introduit explicitement dans [7].

La résolution du problème demande :

426 secondes pour faire 37 pas, soit un pas moyen de 16.21 pour  $f = 2(p+1)$  et  $\alpha$  mis à la valeur 1.45 nous obtenons :

368 secondes pour faire 69 pas, soit un pas moyen de 8.69, on fait de plus de la condensation de masse (mass lumping) on obtient alors :

346 secondes pour faire 65 pas, soit un pas moyen de 9.23  
le même problème résolu avec  $\epsilon = 0.005$  donne respectivement :

821 secondes pour faire 62 pas, soit un pas moyen de 9.67

737 secondes pour faire 95 pas, soit un pas moyen de 6.31

610 secondes pour faire 84 pas, soit un pas moyen de 7.14

#### Premières conclusions :

Les résultats (i.e. l'évolution de la température) sont les mêmes dans les 3 cas ( $\alpha$  fixe) ; on peut donc juger ces 3 variantes de la méthode selon le critère du temps calcul.

Modifier comme indiqué  $\alpha$  et  $f$  présente alors un intérêt évident bien que le nombre de pas soit supérieur après modification. Ceci repose sur le fait que le nombre de calcul effectif est lié au nombre de pas réussis ou non, on peut donc avancer que les modifications proposées minimisent le nombre de pas sanctionnés par un échec (non convergence du cycle correcteur vu en 3.2.1.)

Prendre  $M$  diagonale procure un gain supplémentaire de temps, d'autant plus important que le problème est raide (ceci sera confirmé dans l'étape 3) et le contrôle  $\varepsilon$  fin. La matrice du système est en effet de la forme  $c_m M + \Delta t c_k K$ , quand  $\Delta t$  est petit, le conditionnement de cette matrice est fortement lié à celui de  $M$ , le terme  $\Delta t c_k K$  devenant négligeable. Ceci influe sur la facilité de résolution dans les zones raides où  $\Delta t$  est petit donc sur la taille de ce pas ; le problème devenant mieux conditionné. La méthode sélectionne des pas plus grands (on passe de 95 à 84 pas pour parcourir l'intervalle de temps  $I$  (Dans le second exemple présenté).

Ces 3 modifications seront acquises dans la suite.

#### 4.3. Méthode de Gear - Influence du contrôle

##### 4.3.1. Coût du contrôle :

On étudie, en terme de coût, donc de nombre de pas de temps l'influence du paramètre  $\varepsilon$ . Le tableau suivant consigne les résultats obtenus.

$\varepsilon$	Nombre de pas	temps CPU * (secondes)	pas moyen (secondes)
0.1	65	346	9.23
0.05	66	369	9.09
0.025	69	438	8.69
0.01	75	541	8.00
0.005	84	610	7.14
0.0025	106	776	5.66
0.001	136	1018	4.41

Tableau N°1

Le temps et le nombre de pas sont évidemment très liés au choix de  $\varepsilon$ .

\* Ordinateur CII-HB 68 DPS

4.3.2. Evolution des pas de temps

La figure 4 montre, en fonction de  $\varepsilon$ , l'évolution de la taille du pas de temps.

En abscisse : le nombre de pas

En ordonnée : la taille en secondes.

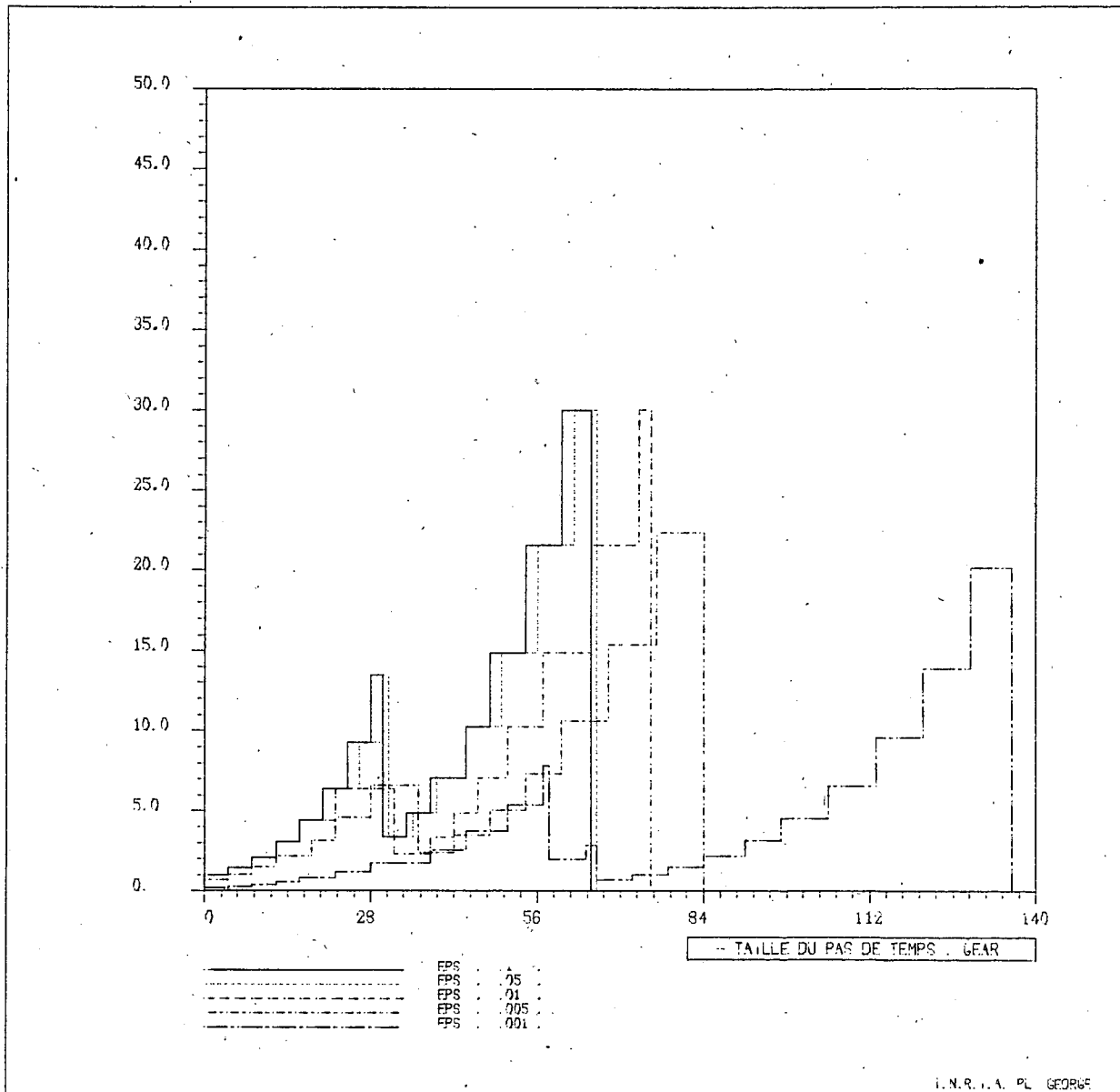


Figure 4.

Les propriétés de la méthode sont mises ici en évidence. Pour débiter le calcul, le pas de temps est pris assez petit, il croit ensuite régulièrement car le problème évolue régulièrement ; la difficulté due au pic (courbe 5) fait chuter le pas et impose longuement des pas de petites tailles ; le problème ensuite redevient régulier : le pas peut de nouveau croître. Pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$  les résultats sont qualitativement de cette nature ; la valeur de  $\varepsilon$  influe en particulier sur la vitesse de croissance du pas.

#### 4.3.3. Lissage du gradient de la solution :

Les courbes suivantes présentent plusieurs résultats relevés au coin du barreau.

i) évolution du pas de temps

abscisse : nombre de pas de temps

ii) évolution du flux représentée aux mêmes points

iii) évolution de la température représentée aux mêmes points

iv) évolution du temps, c'est-à-dire la sommation des pas de temps.

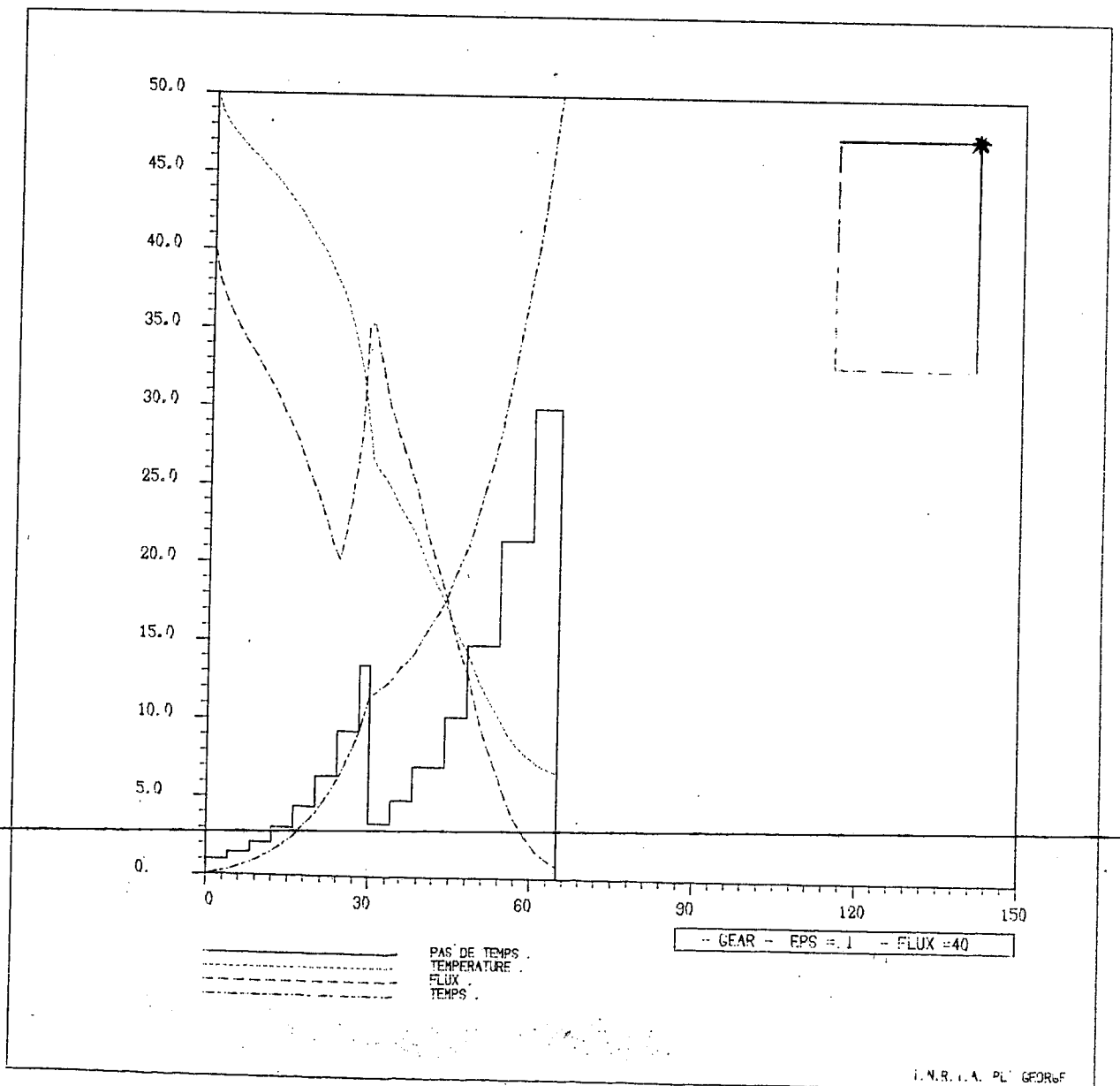


Figure 5.1.



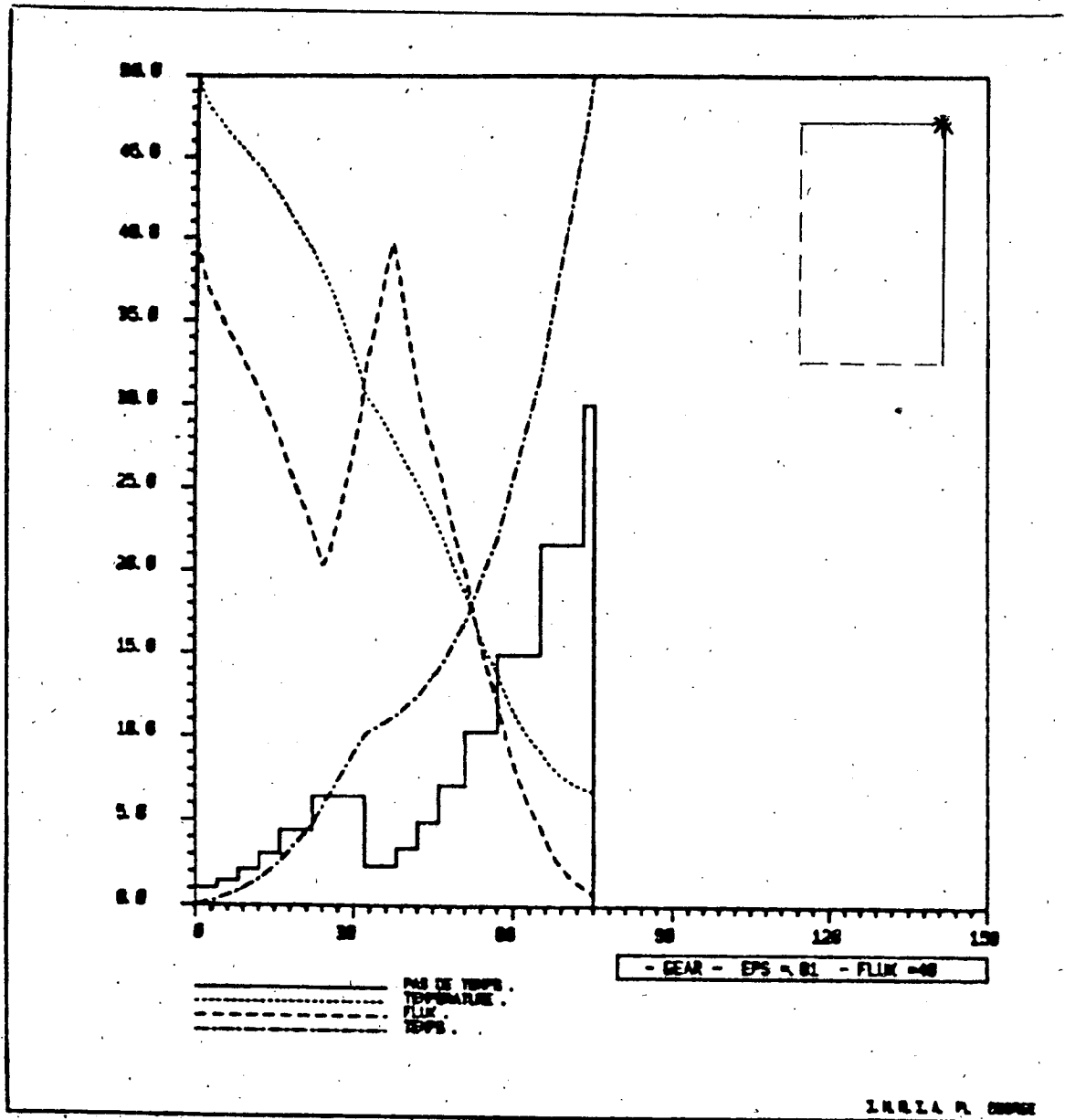


Figure 5.2.

Avec ce mode de représentation, on met en évidence :

i) l'influence de la variation du flux sur celle du pas : tant que le flux varie régulièrement le pas de temps grandit : quand le flux présente un pic, le pas de temps calculé par la méthode s'effondre pour croître à nouveau quand la zone critique est franchie.

ii) le lissage du gradient de la température ; la courbe des températures montre que l'ajustage du pas, selon la difficulté du problème permet de lisser le gradient, la courbe est alors plus "smooth". Ceci est bien sûr le principal intérêt de la méthode de Gear.

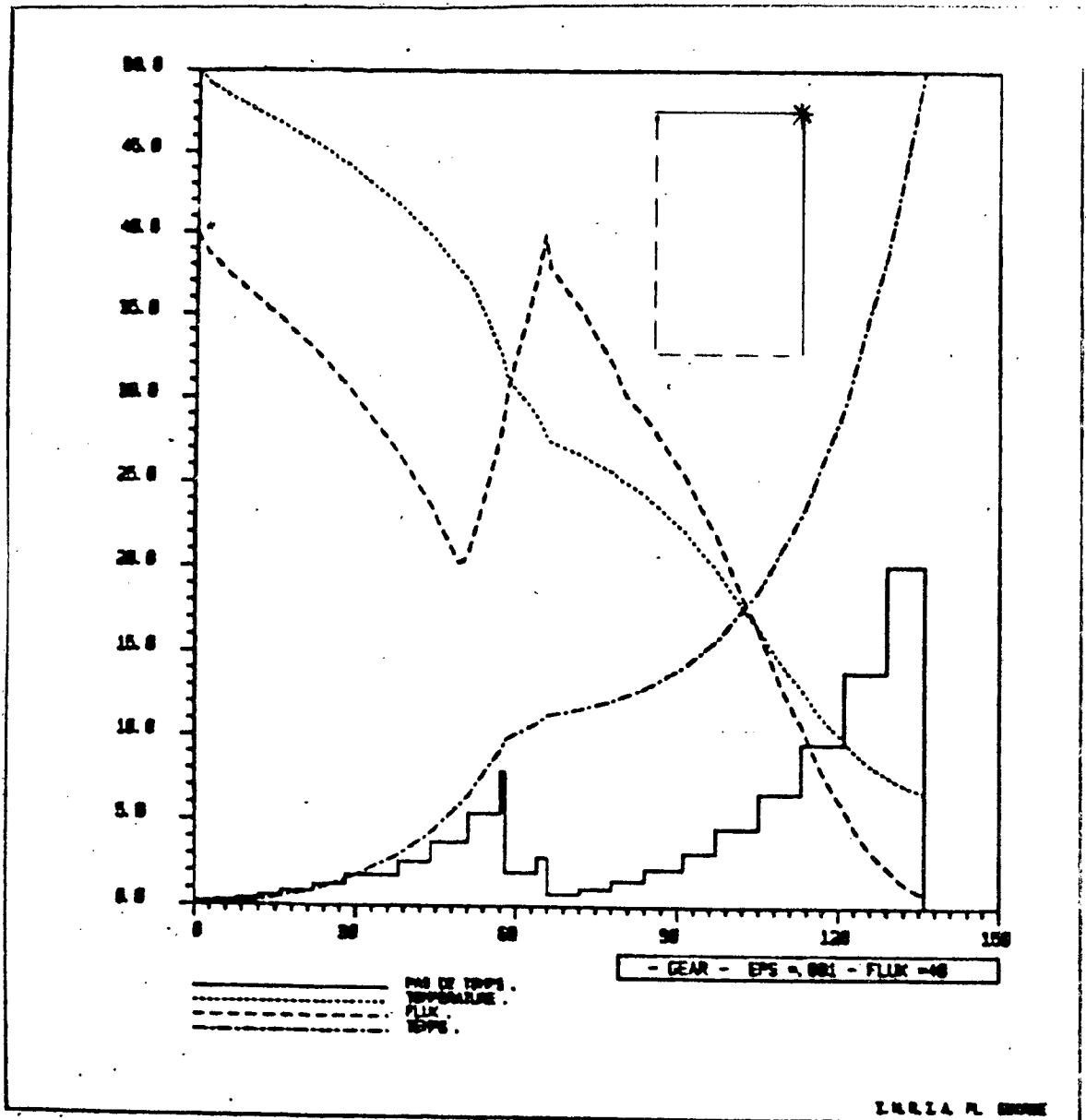


Figure 5.3.

Le lissage du gradient est ici net. On se reportera à la figure 6 pour comparer avec le gradient réel de la solution.

On remarque de plus que pour  $\varepsilon = 0.01$  ou  $\varepsilon = 0.001$  les résultats sont pratiquement les mêmes (figure 6).

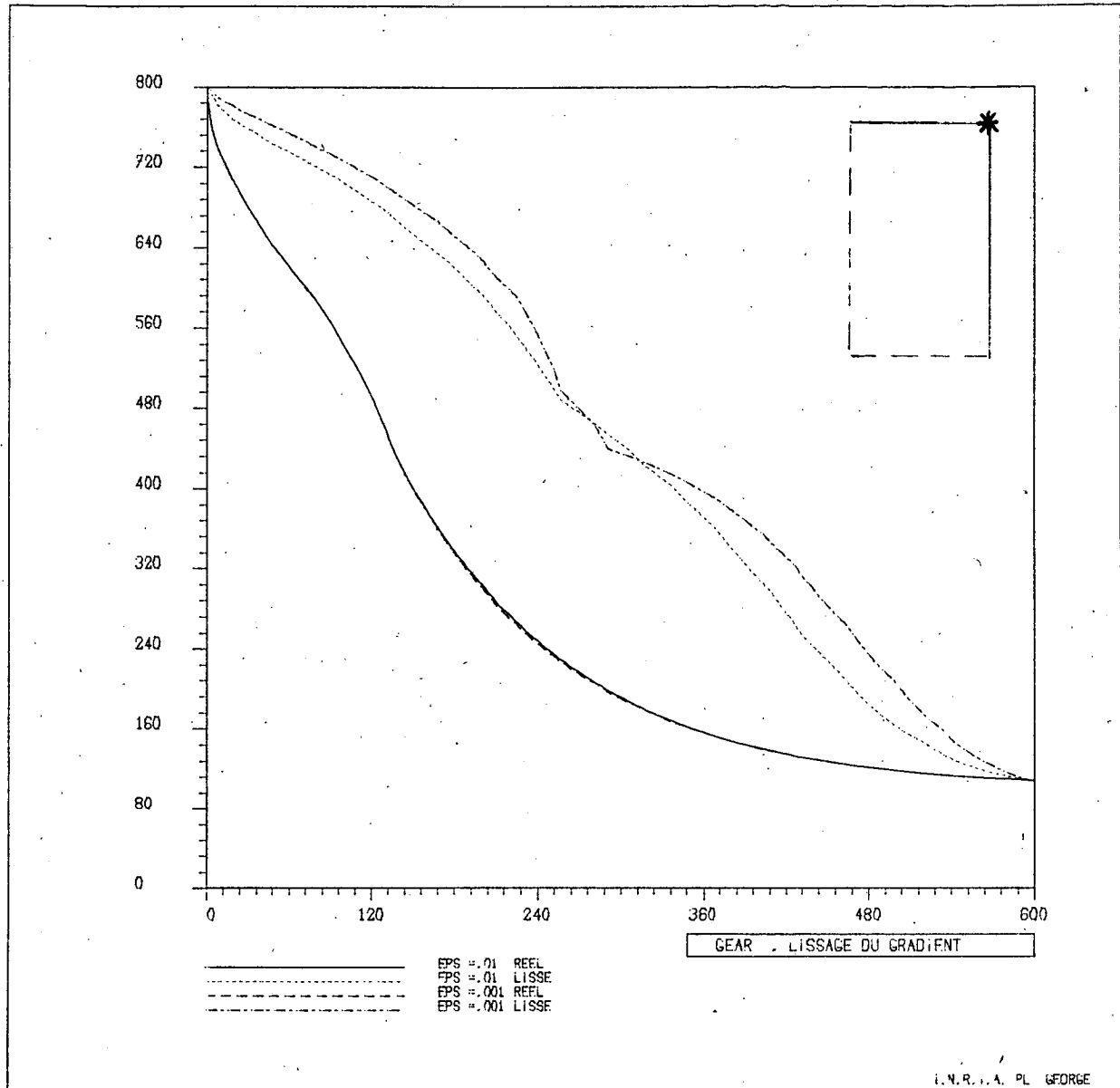


Figure 6.

#### 4.3.4. Conclusions

Il est intéressant pour cette méthode de prendre la matrice de masse diagonale, de limiter la fréquence des changements de pas et le facteur de croissance du pas : ceci entraîne un gain de temps calcul important.

L'adaptation de la taille du pas a la difficulté du problème permet un lissage du gradient de la solution, en particulier l'emploi de pas de grande taille si ce gradient est faible minimise le temps calcul.

Le contrôle d'erreur locale fixe à 0.01 paraît suffisant pour obtenir une bonne précision des résultats avec un coût raisonnable.

L'ordre de la méthode évolue comme la taille du pas. Si le pas diminue l'ordre tend à devenir 1.

#### 4.4. Méthodes multipas - Comparaisons

Vu la grande simplicité des schémas multipas classiques (comparés à la méthode automatique de Gear) on est tenté d'utiliser ces méthodes pour obtenir des coûts moindres.

Les problèmes qui se posent sont de deux ordres :

- i) choisir le schéma : ordre et coefficients de la méthode
- ii) choisir la taille du pas de temps qui restera la même tout au long du calcul.

##### 4.4.1. Choix de la méthode :

Pour notre problème nous avons testés différentes méthodes d'ordre allant de 1 à 4, implicites ou explicites donc plus ou moins stables et précises. Les résultats (la température) sont pratiquement identiques tandis que les temps calculs sont du même ordre.

Nous choisirons dans la suite une méthode d'ordre 2 implicite : la méthode de différentiation rétrograde. [6].

##### 4.4.2. Comparaisons avec la méthode de Gear :

Pour choisir la taille du pas  $\Delta t$ , une première idée est de prendre la valeur moyenne obtenue lors du calcul effectué par la méthode de Gear :

$$\Delta t = 8 \text{ secondes (tableau n° 1 } \epsilon = 0.01)$$

On obtient alors les temps calculs suivants :

linéarisation simple	: 204 secondes
itérations de point fixe:	372 secondes
méthode de Gear (rappel):	541 secondes

Ces méthodes multipas sont donc, évidemment, moins coûteuses.

Comparons les résultats obtenus avec ceux obtenus par la méthode de Gear. La figure 7 indique les différences de température obtenues :

abscisse	: le temps
ordonnée	: différence de température.

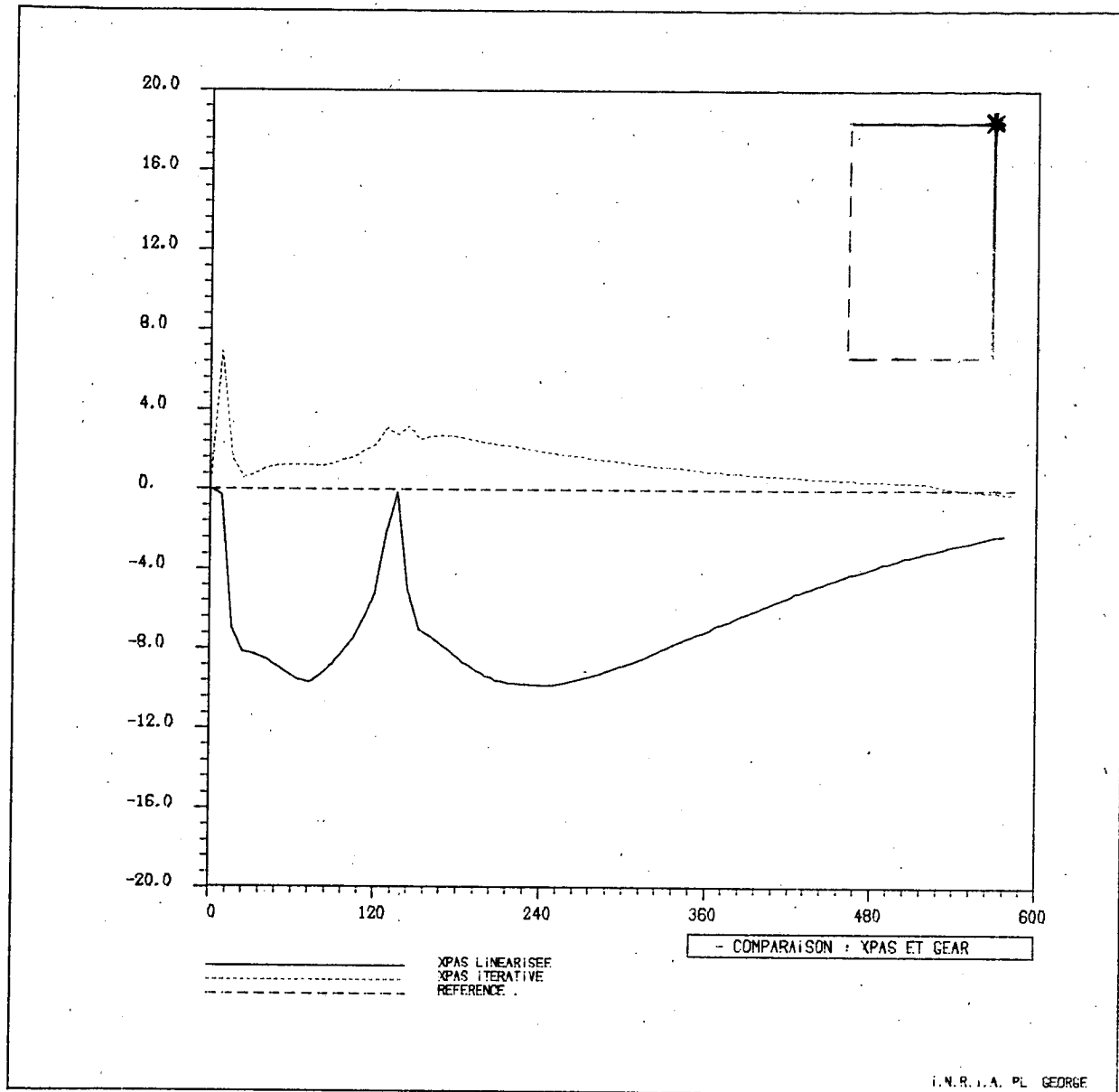


Figure 7.

La linéarisation simple ne permet pas de suivre le phénomène, l'algorithme de point fixe, quoique meilleur, présente des oscillations.

Vu le faible coût, on peut prendre un pas plus petit, le pas  $\Delta t = 4$  est choisi.

Les temps calculs sont alors :

linéarisation simple	: 393 secondes
itérations de point fixe	: 645 secondes
méthode de Gear (rappel)	: 541 secondes

La méthode de Gear est alors moins coûteuse que la méthode multipas itérative.

La figure 8 indique les différences de températures obtenues.

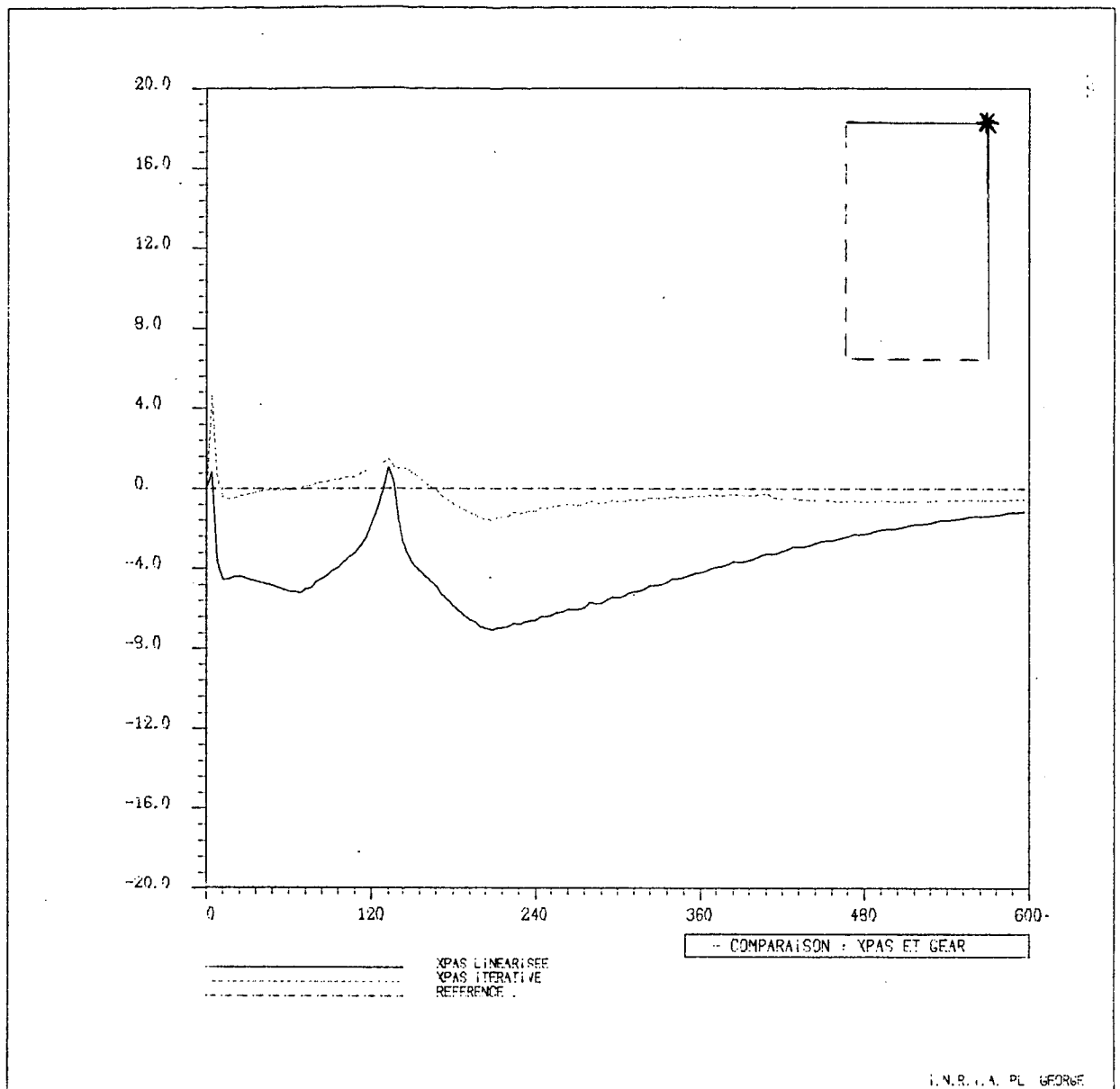


Figure 8.

Les résultats sont meilleurs que précédemment, l'écart maximum étant de quelques degrés.

Indiquons que pour  $\Delta t = 2$  secondes, on obtient des solutions comparables pour les trois méthodes, mais les temps de calculs deviennent défavorables aux méthodes multipas :

multipas linéarisée : 769 secondes

algorithme de point fixe : 937 secondes

à rapprocher des 541 secondes mis par la méthode de Gear.

#### 4.4.3. Conclusions :

Pour ce problème ( $\phi_{40}$  étant choisi) la solution n'est pas très raide, on a montré néanmoins qu'il est assez dur de choisir la taille de  $\Delta t$  pour les méthodes multipas.

Si on prend  $\Delta t$  assez grand, la simplicité des calculs donne un coût moindre pour ces méthodes mais les résultats sont "incertains"; pour obtenir des solutions comparables, il faut prendre un pas petit et le temps calcul avantage la méthode de Gear, pour laquelle le choix du pas de temps n'est pas un problème.

### V. Comparaisons des méthodes - Etape 2

#### 5.1. Les différents problèmes étudiés :

Les matrices de masse et de rigidité sont toujours constantes et correspondent aux valeurs des coefficients  $\rho_c$  et  $k$  de l'étape 1.

On fait maintenant varier le flux de plus en plus brutalement de manière à nous approcher d'une simulation de l'étape 3.

Les différentes courbes de flux sont données sur la figure 10 ; on note par  $\phi_{40}$ ,  $\phi_{50}$ ,  $\phi_{60}$ ,  $\phi_{100}$ ,  $\phi_{120}$  et  $\phi_{200}$  (non représenté) les différents problèmes associés à ces flux.

La grille 10x10 et l'interpolation P1 sont encore choisis.

abscisse	: la température
ordonnée	: le flux.

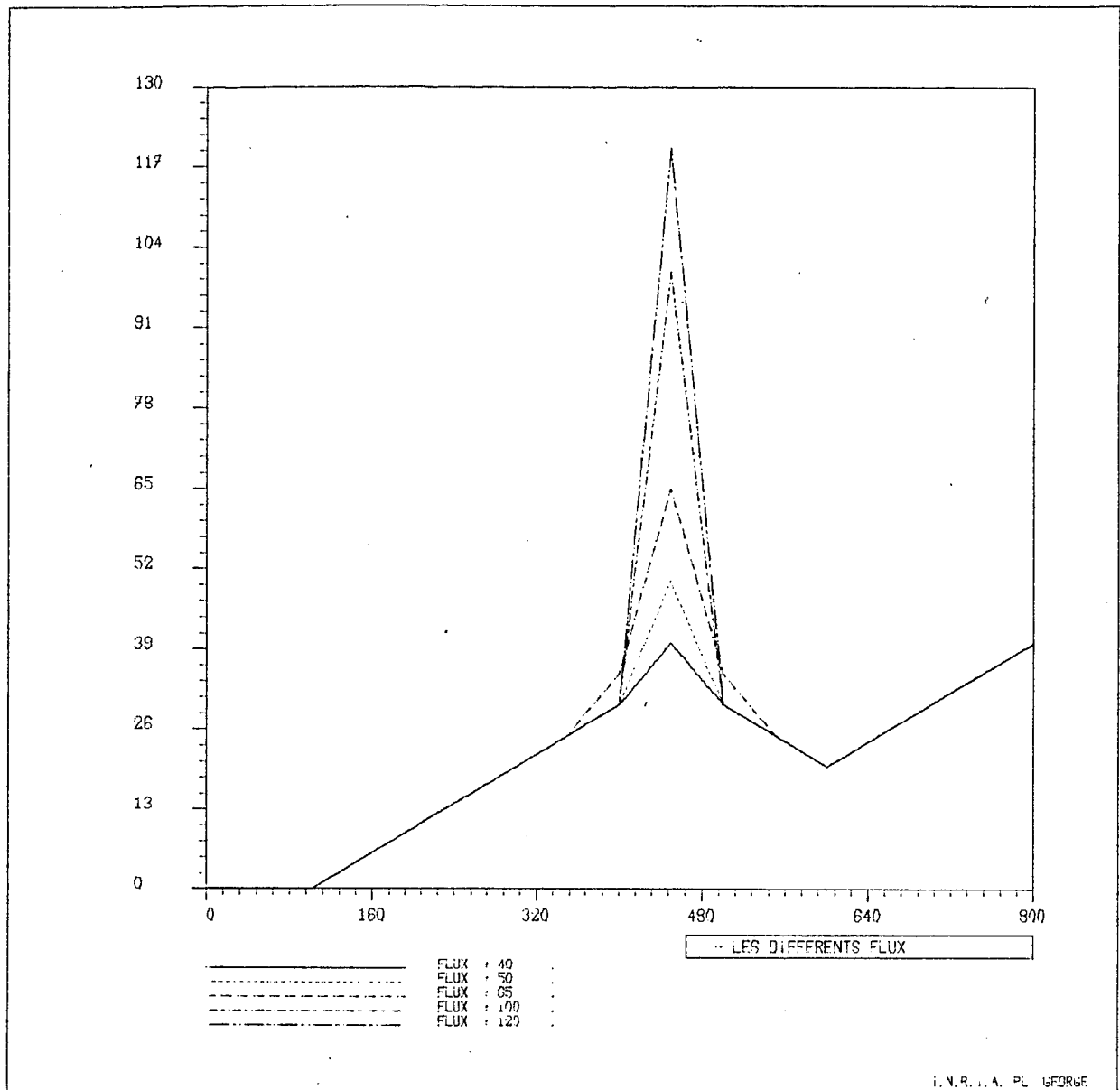


Figure 10.

## 5.2. Comportement de la méthode automatique de Gear :

### 5.2.1. Temps calcul

Le tableau n° 2 donne pour  $\epsilon$  fixée à 0.01 le nombre de pas et le temps C.P.U. nécessaire aux calculs, en fonction du problème traité.



$\phi$	Nombre de pas	temps CPU (secondes)	pas moyens (secondes)
40	75	541	8.00
50	80	572	7.50
65	102	698	5.88
100	146	1064	4.10
120	161	1157	3.72
120 <sup>(*)</sup>	-	2487	-
200	202	1395	2.97

Tableau n°2

(\*) Pour le problème  $\phi_{120}$  le temps nécessaire serait de 2487 secondes si on ne tenait pas compte des conclusions de 4.1. Ceci renforce à postériori ces conclusions.

Plus le problème est raide, plus la méthode de Gear devient coûteuse ce qui est logique compte tenu de l'adaptation du pas, donc du nombre de pas total, à la difficulté du problème.

#### 5.2.2. Raideur du gradient :

La difficulté du problème est mise en évidence sur la figure 11 où l'on a représenté la chute de température correspondante au pic de la fonction flux au coin du barreau (point le plus délicat).

On remarque le gradient presque infini présenté par la solution du problème  $\phi_{200}$ . Ce gradient augmentant du problème  $\phi_{40}$  au problème  $\phi_{200}$ .

Abcisse : le temps

ordonnée : la température.

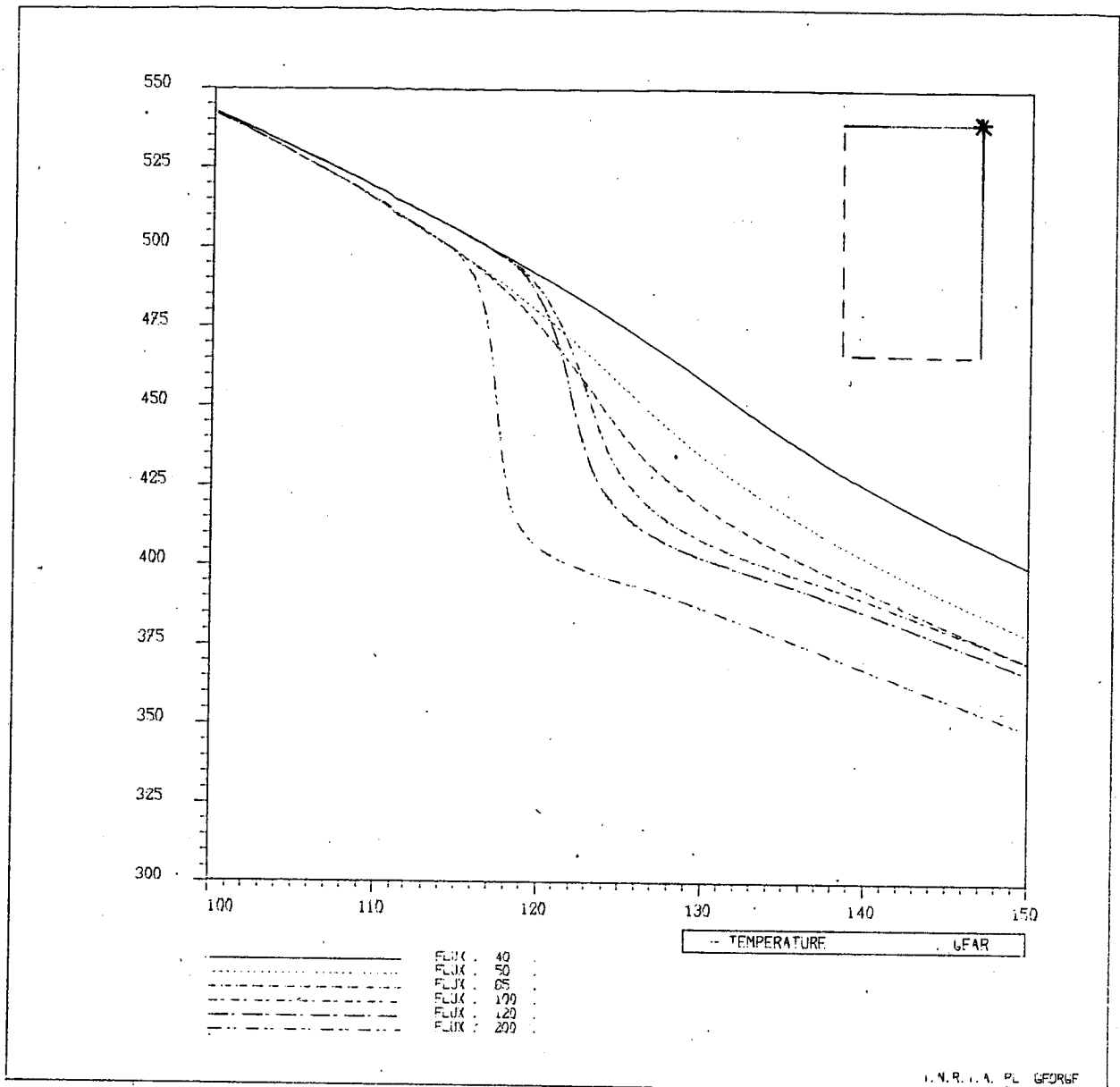


Figure 11.

### 5.3. Comparaison entre les 3 méthodes :

#### 5.3.1. Temps calculs

Pour les méthodes multipas linéarisées, on peut prévoir le temps calcul nécessaire puisque  $\Delta t$  étant fixé, le nombre de pas est connu à l'avance, ainsi  $\Delta t = 2$  donne 300 pas et un temps approximatif de 750 secondes si on fixe  $\Delta t = 1$  on sait que le temps sera double, on trouve effectivement à peu près 1 500 secondes.

Pour les méthodes multipas avec point fixe, on ne connaît pas le nombre d'itérations de point fixe donc le nombre réel de pas de calcul ; néanmoins si pour  $\Delta t$  on a un temps de  $n$  secondes, il est probable que pour  $\Delta t/2$  le temps sera inférieur à  $2n$ . En effet, le nombre d'itérations de point fixe sera moins grand puisque l'on suit mieux la solution.

ainsi :

$\Delta t = 2$  donne 300 pas de temps et demande : 960 secondes

$\Delta t = 1$  demande : 1590 secondes

Pour la méthode automatique de Gear, une telle prévision du temps est impossible, néanmoins on sait que les résultats seront bons ce qui n'était pas garanti avec les méthodes multipas, comme on le verra ci-dessous.

### 5.3.2. Comparaisons des solutions :

#### i) Problème $\phi_{120}$ :

La figure 12 présente les résultats comparés entre les 3 méthodes.  
Le pas de temps vaut  $\Delta t = 2$  secondes.

temps calcul :	multipas linéarisée	:	760	secondes
	multipas itérative	:	960	secondes
	Gear	:	1157	secondes

abscisse : le temps (fenêtre de  $t_0 = 115$  à  $t_0 = 140$  secondes)  
la température (fenêtre correspondante).

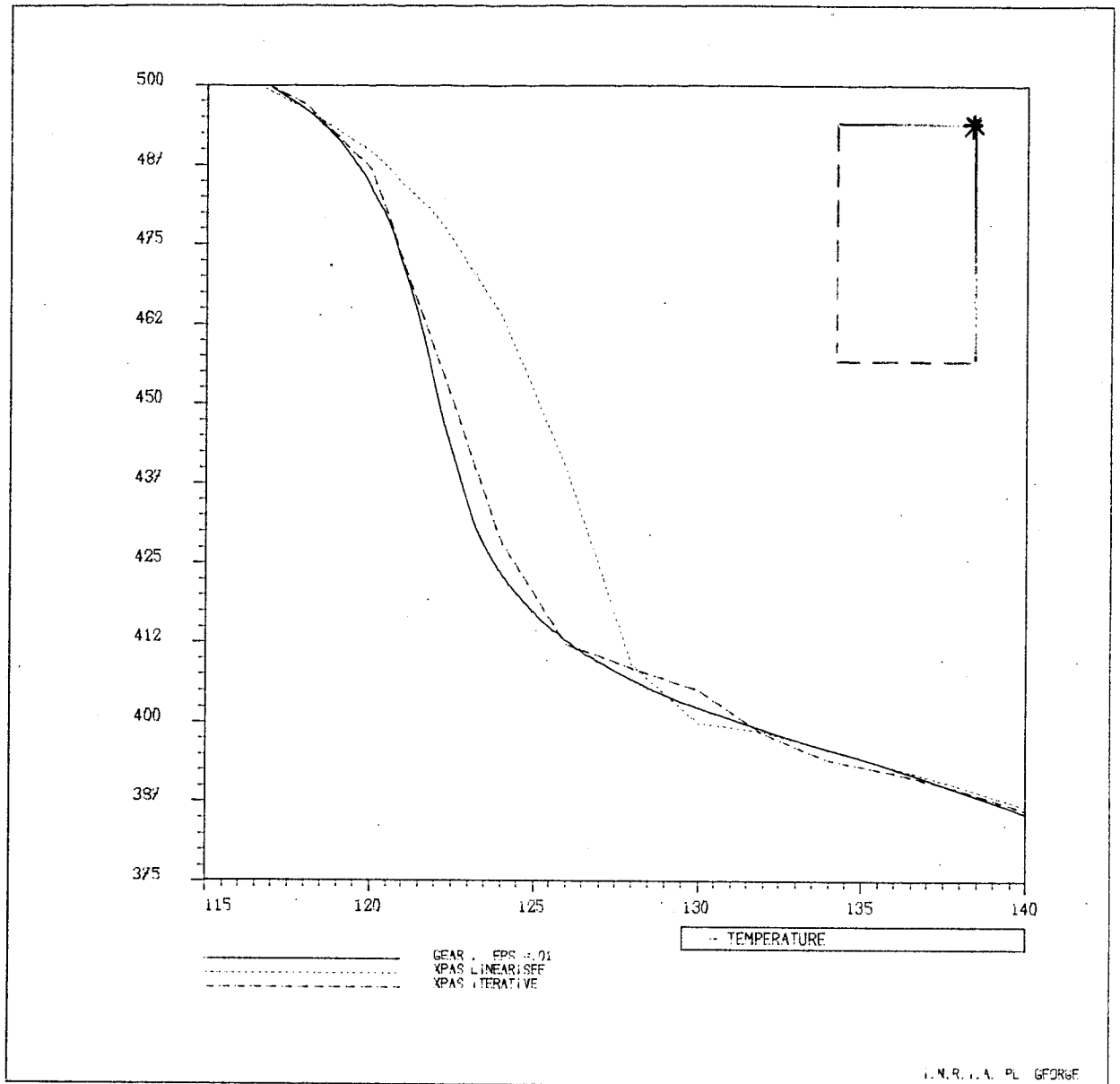


Figure 12.

Les méthodes multipas n'apprécient pas correctement le "saut" du gradient et présentent des oscillations.

La courbe 13 donne une autre représentation de ce phénomène, nous représentons les différences entre les méthodes, la méthode de Gear étant prise comme référence (on vérifiera plus loin que la méthode de Gear donne les mêmes résultats que la méthode multipas prise à la limite : " $\Delta t \rightarrow 0$ ").

abscisse : le temps

ordonnée : différence de température.

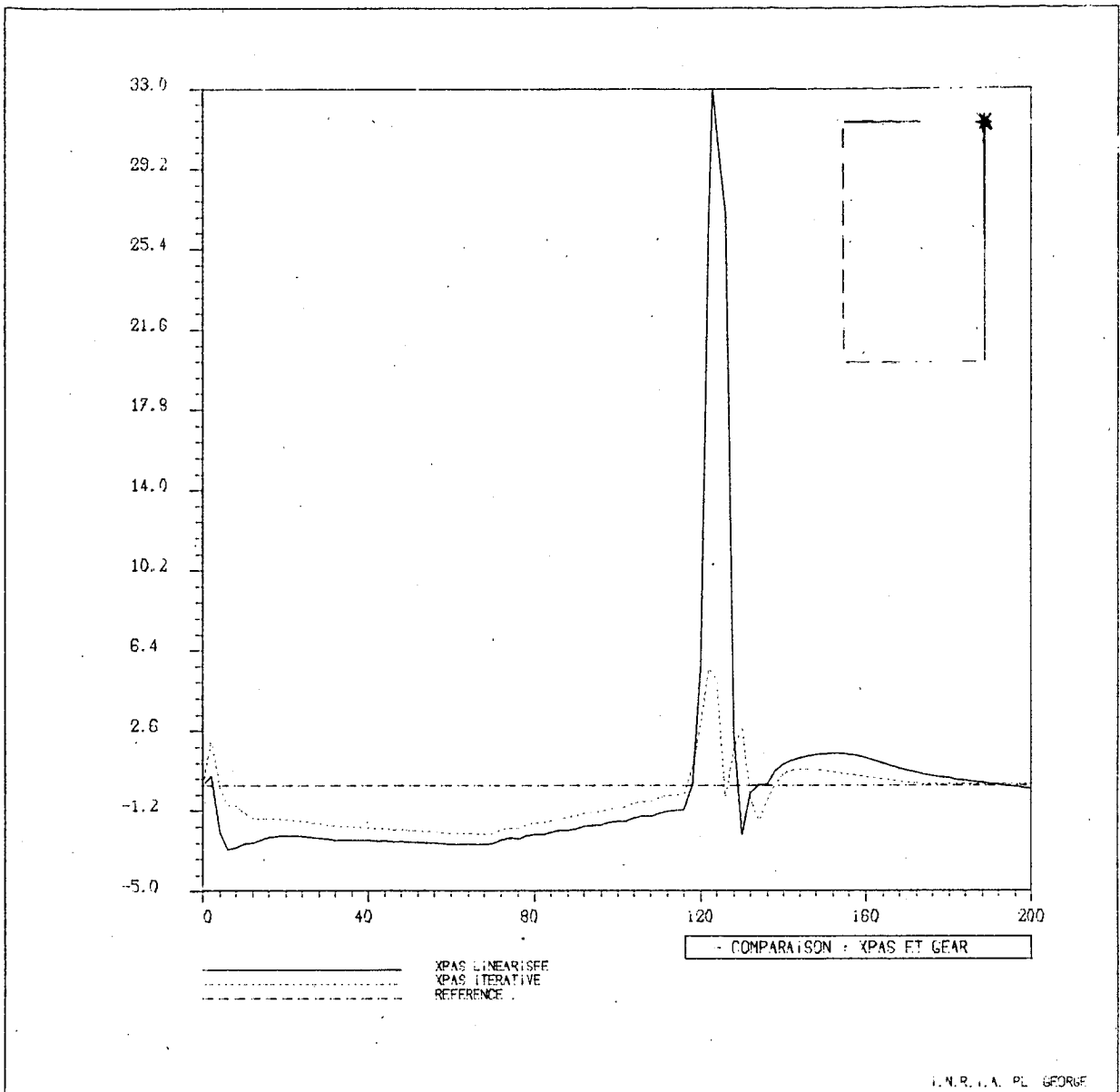


Figure 13.

Les méthodes multipas présentent un "choc" et des oscillations, la méthode itérative se comportant mieux.

En regard des coûts, on peut se permettre de prendre  $\Delta t = 1$  pour faire la même étude.

Les figures 14 et 15 présentent les résultats.

La solution se rapproche alors de celle de la méthode de Gear, le "choc" étant moins important. Néanmoins les coûts sont plus importants que pour la méthode de Gear :

multipas linéarisée	:	1510 secondes
multipas itérative	:	1590 secondes
méthode de Gear (rappel):	:	1157 secondes.

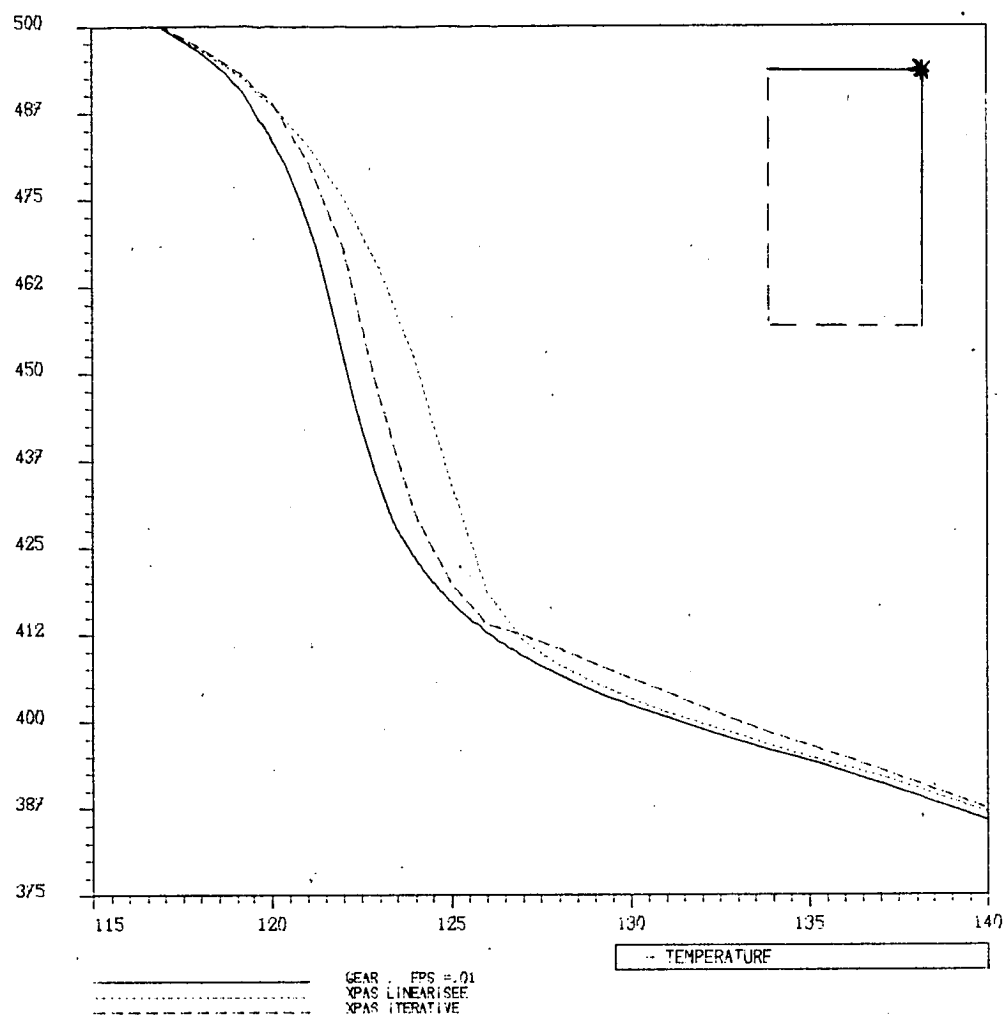


Figure 14.

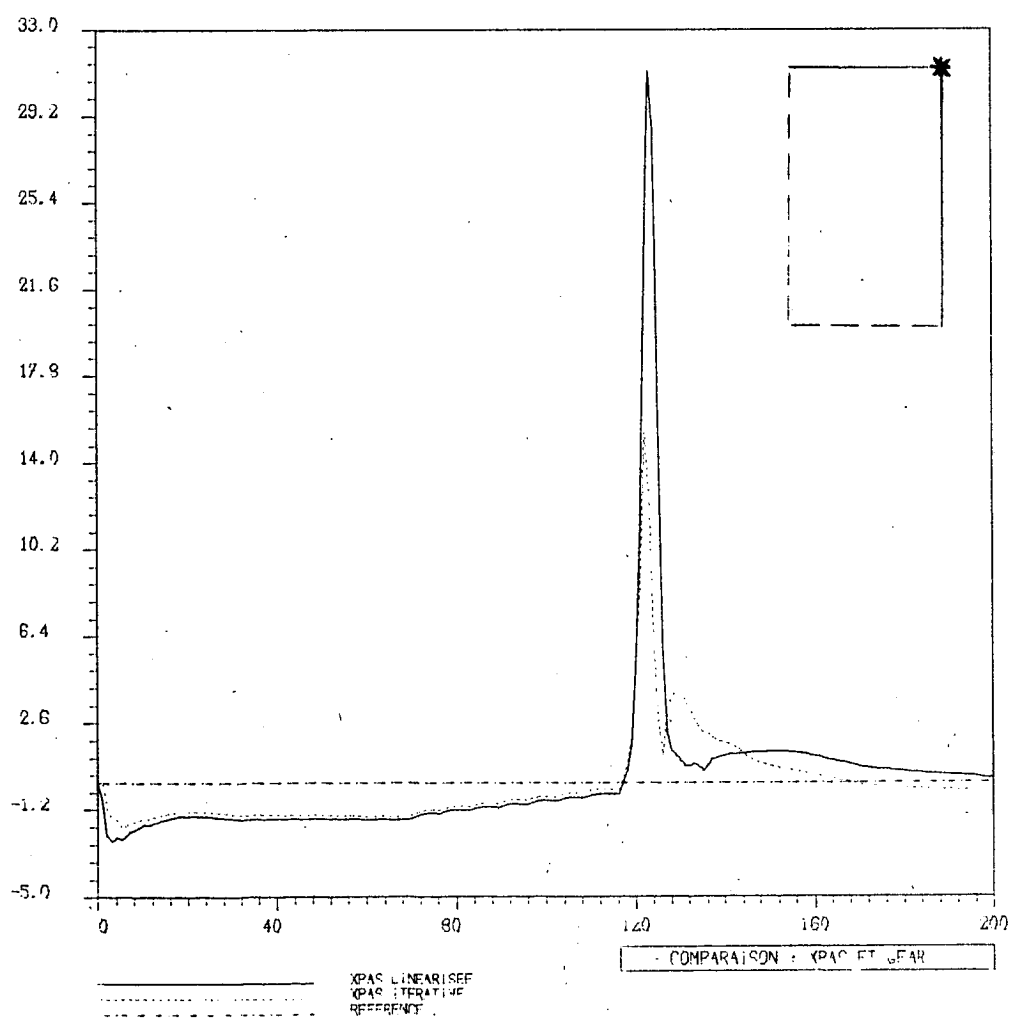


Figure 15.

ii) problème  $\phi_{200}$  :

La même étude est faite pour ce problème, plus raide que le précédent. Les conclusions précédentes sont confirmées, comme le montre les figures 16, 17 pour lesquelles on a pris  $\Delta t = 2$ . et 1. secondes respectivement.

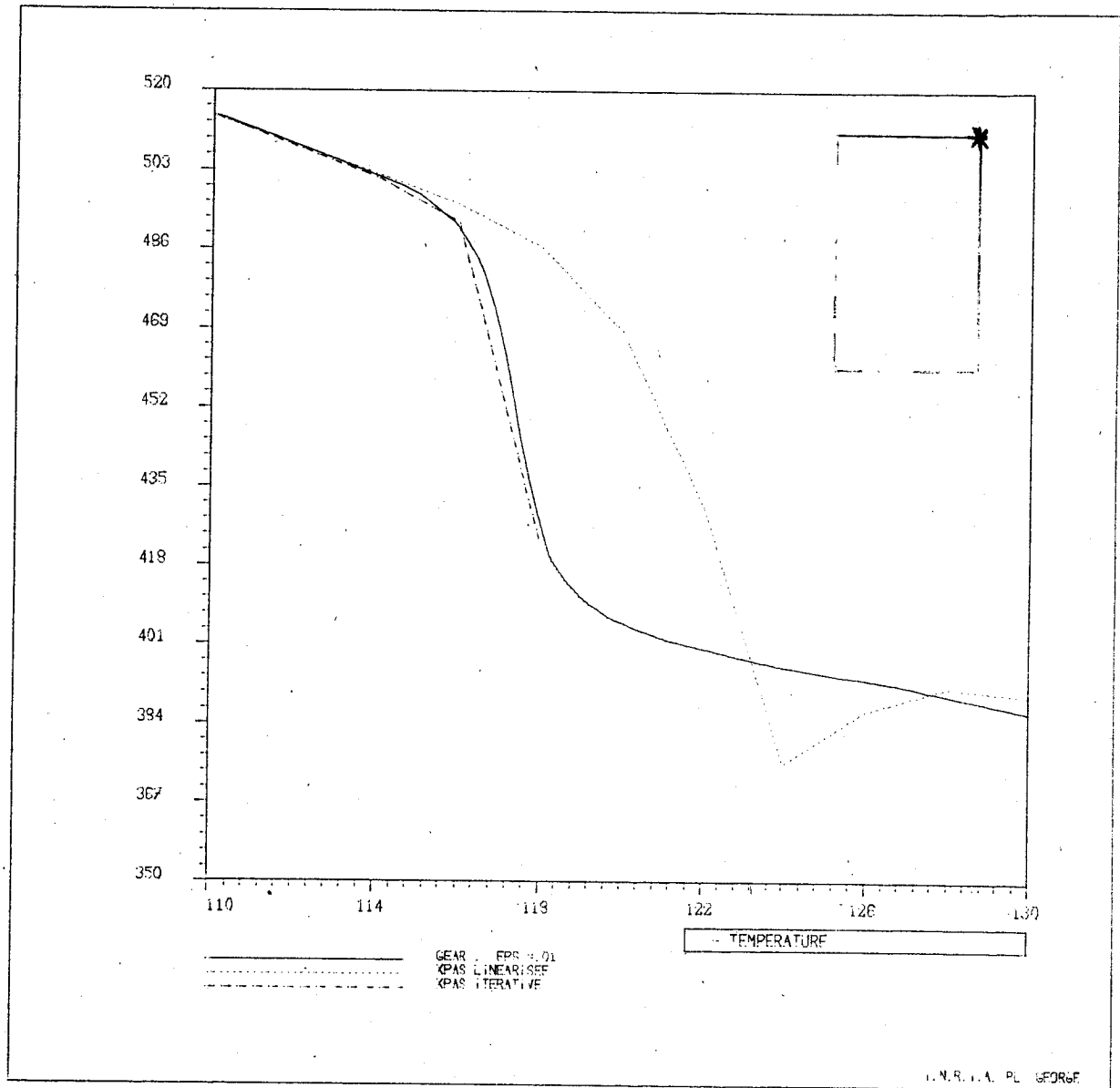


Figure 16 .

Pour  $\Delta t = 2$ , la méthode multipas itérative ne converge pas (courbe 3 de la figure 16). Le pas de temps  $\Delta t = 1$  s'avère donc nécessaire (figure 17).

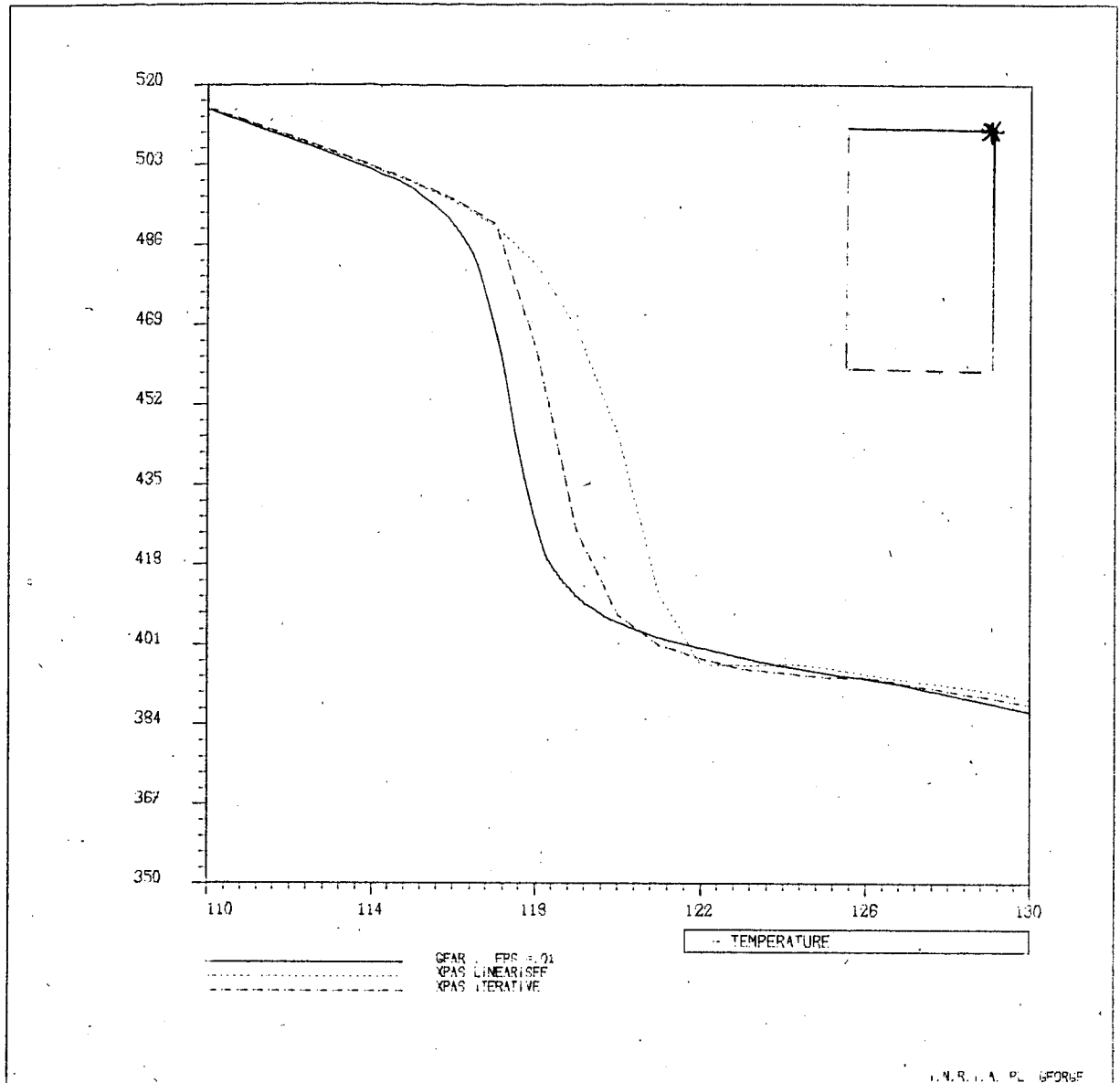


Figure 17.

Continuant l'étude, indépendamment du temps calcul, les pas  $\Delta t = .5$  puis  $\Delta t = .25$  ont été choisis. Les 3 courbes se rapprochent toujours selon la même hiérarchie :

méthode de Gear < multipas itérative < multipas linéarisée

Ceci nous permet d'établir que la méthode de Gear donne les mêmes résultats que la méthode multipas prise pour  $\Delta t$  très petit.

On remarque de plus que pour  $\Delta t$  très petit, les 2 méthodes multipas se confondent.

Le temps calcul favorise de plus en plus la méthode de Gear ; ainsi pour  $\Delta t = .25$  on a respectivement :

5906 secondes (multipas linéarisée)

5995 secondes (multipas itérative)

et toujours 1157 secondes pour la méthode de Gear.



## VI. Comparaisons des méthodes - Etape 3-

### 6.1. Le problème traité :

On s'intéresse au problème présenté en II pour lesquels les coefficients varient selon les courbes de la figure 2.

Néanmoins, si  $u$  est la température, pour :

$$300 < u < 800 \quad \rho_c, k \text{ et } \phi \text{ varient}$$

tandis que pour :

$$u < 300 \quad \rho_c \text{ et } k \text{ restent constantes.}$$

On prendra en compte ce fait en indiquant que :

$u < 300$  les matrices sont constantes et le flux seul varie on se trouve alors dans le cadre de l'étude 2 avec il est vrai un flux plus raide.

$u > 300$  les matrices et le second membre varient nécessitant des assemblages à chaque "pas".

L'interpolation P1 est toujours prise avec cette fois une grille 9x11.

### 6.2. Comparaison des méthodes :

#### 6.2.1. Choix du pas $\Delta t$ - méthode multipas-

Les difficultés vues précédemment se présentent ici avec plus d'acuité compte tenu de la nature du problème.

Ainsi pour des valeurs du pas  $\Delta t$  trop grandes les méthodes multipas ne convergent pas. Au niveau du pic présenté par le flux donc de la chute brutale de température plusieurs cas de divergence se présentent.

##### i) méthode linéarisée :

pour  $\Delta t = 10$   $\Delta t = 5$  secondes la méthode explose

pour  $\Delta t = 2.5$  la méthode oscille et ne se stabilise que très tard après le choc thermique.

Les figures 18, 19, et 20 montrent ces résultats.

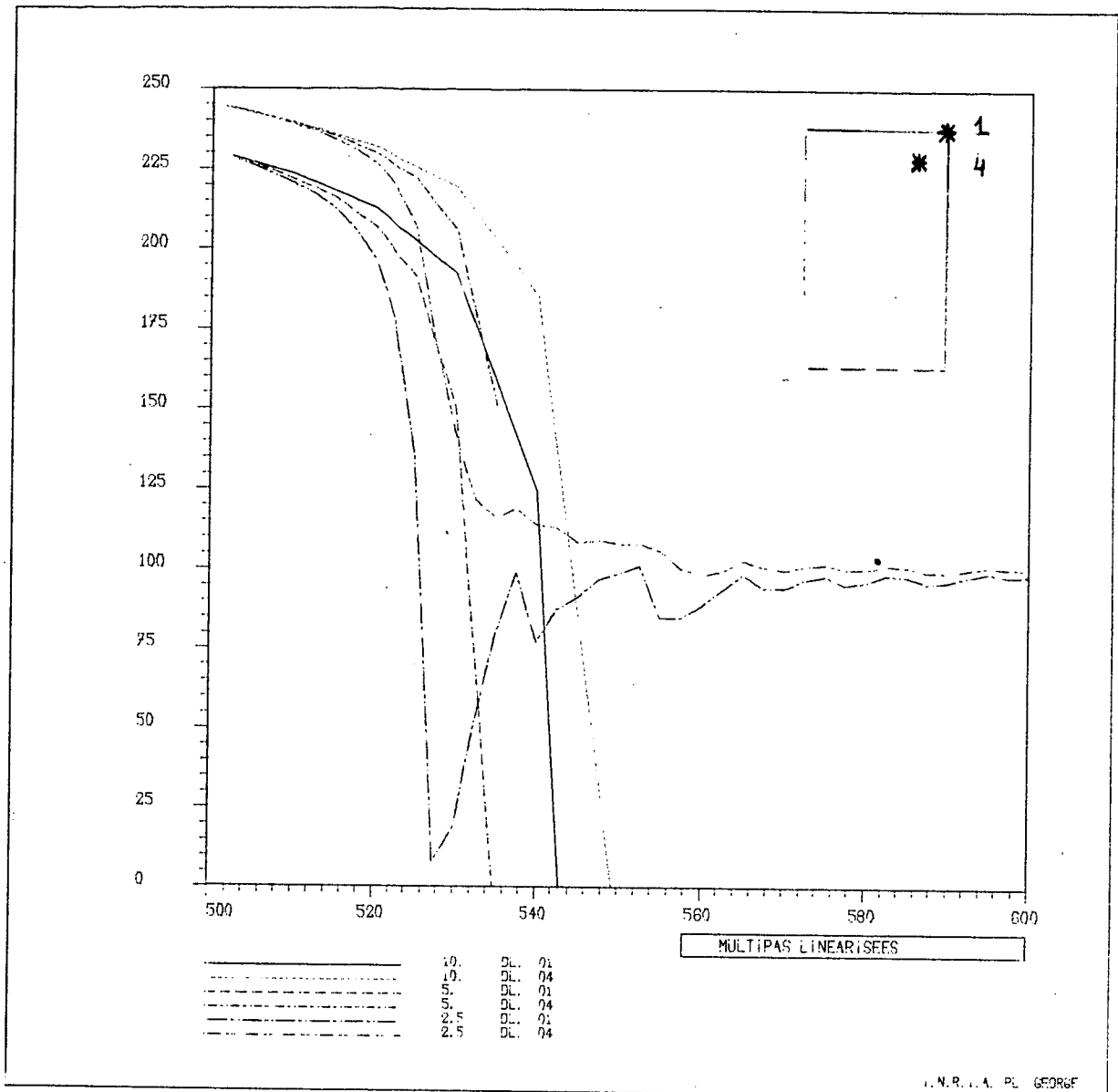


Figure 18.

L'évolution est montrée pour 2 degrés de liberté. Le point 1 qui est le coin du barreau et le point 4 légèrement à l'intérieur.

Pour  $\Delta t = 10$  la solution explose. Pour  $\Delta t = 5$  on a le même résultat, tandis que pour  $\Delta t = 2.5$  la courbe du point 1 présente un pic négatif non physique tandis que celle du point 4, point plus régulier, oscille.

Un pas de temps plus faible est nécessaire, comme le confirme les résultats portés sur la figure 19 qui montre l'évolution de la température relevée aux points de la frontière (donc soumis directement au flux). La solution oscille longuement et ne se stabilise que très longtemps après le saut de température.

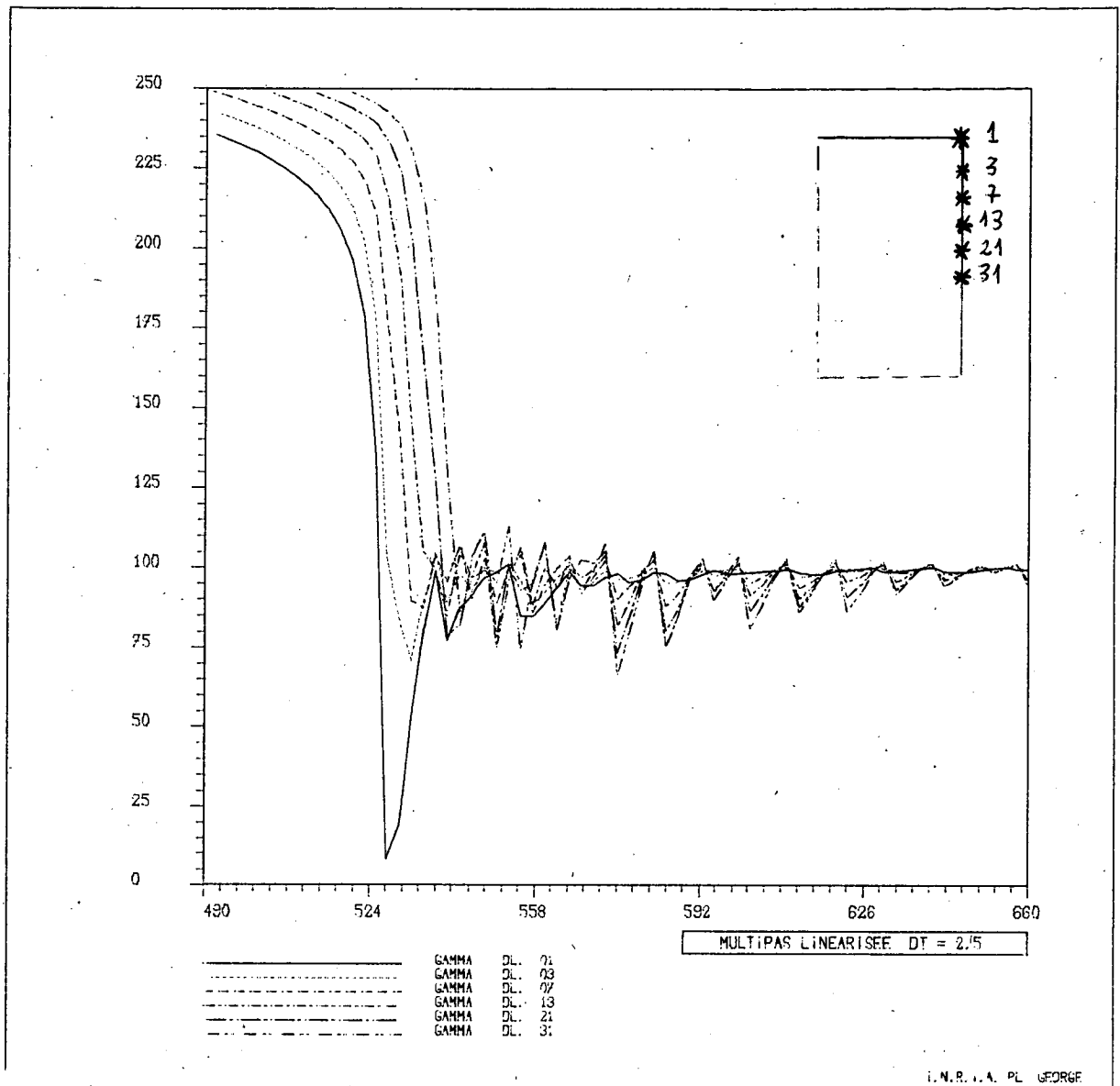


Figure 19.

La figure 20 montre en particulier que, si les points de la frontière sont difficiles à appréhender, les points internes, non soumis directement au flux sont relativement mieux calculés. A l'intérieur du domaine le choc thermique est amorti.

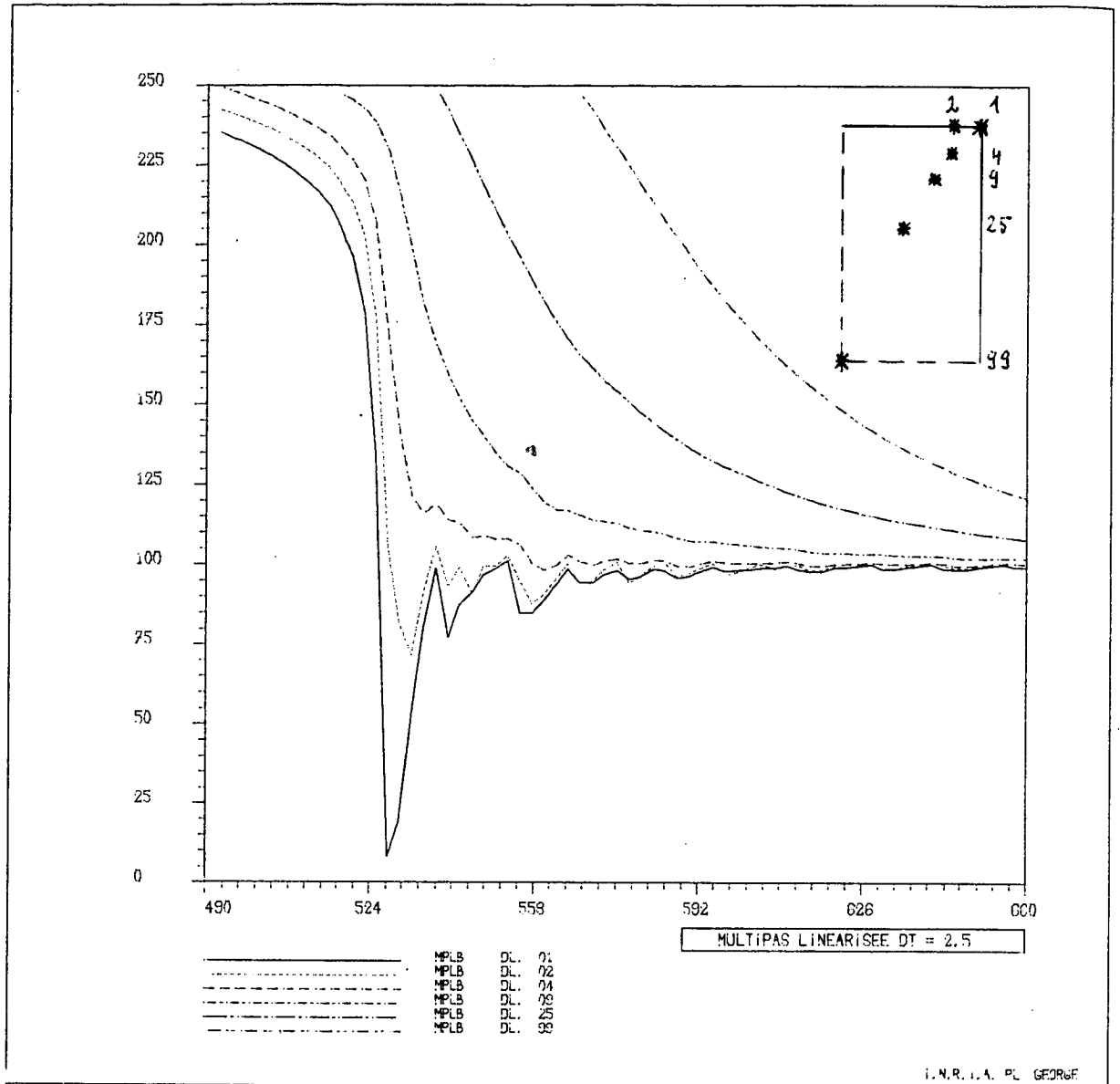


Figure 20.

Le temps calcul pour cette résolution ( $\Delta t = 2.5$ ) est de : 1190 secondes CPU.

Pour  $\Delta t = 1$  le temps calcul est de 2460 secondes CPU, les résultats sont donnés par les courbes 21 et 22 qui représentent les résultats aux mêmes points que les courbes 19 et 20 respectivement.

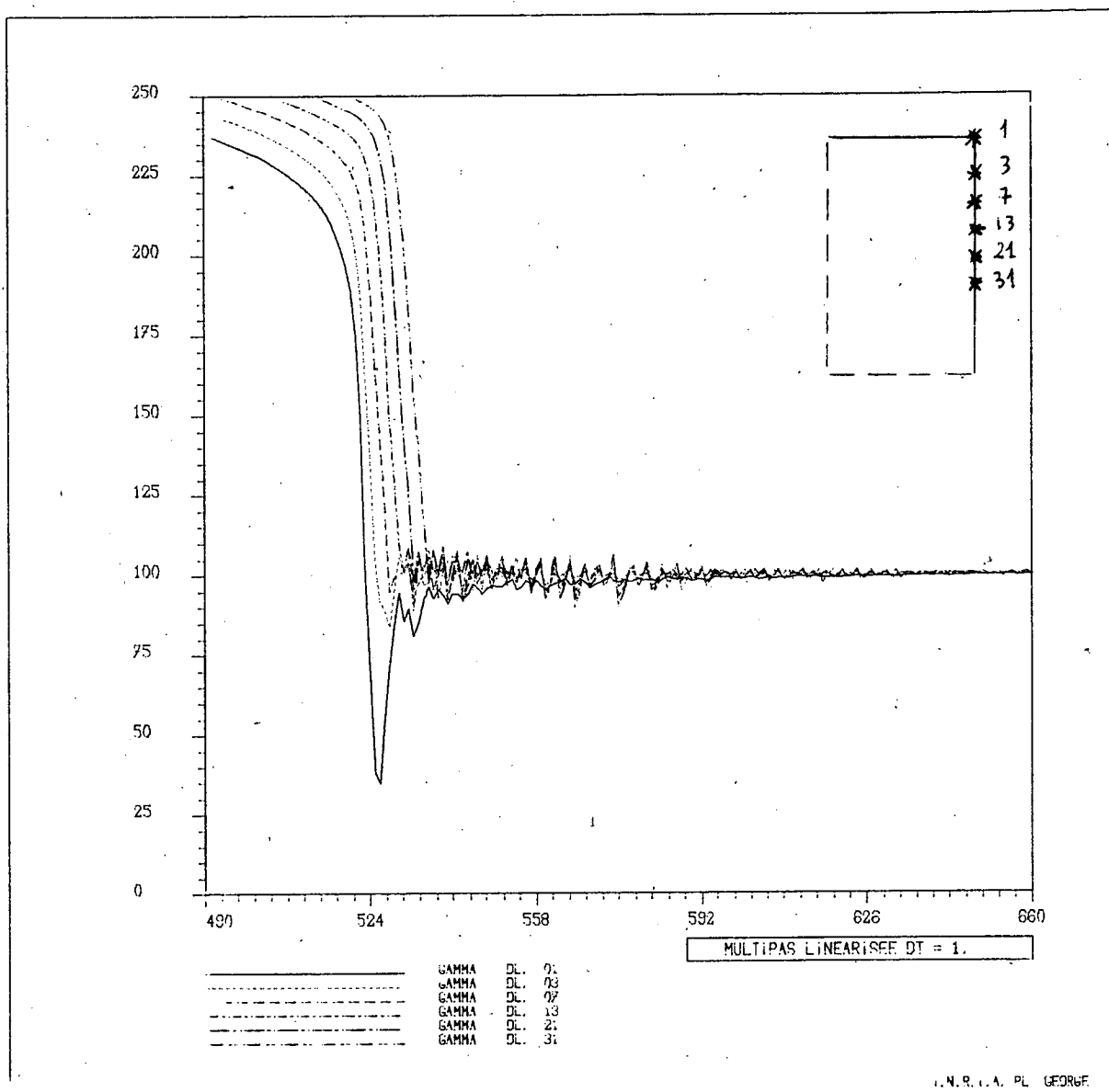


Figure 21.

Les oscillations révélées aux points frontaliers sont de moins fortes amplitudes, un pas de temps plus petit devrait permettre de les éliminer.

Les points internes (courbes 4 à 6 de la figure 22) sont plus receliquement calculés, un pas plus petit se serait néanmoins pas inutile.

En regard du coût les tests pour cette méthode sont abandonnés.

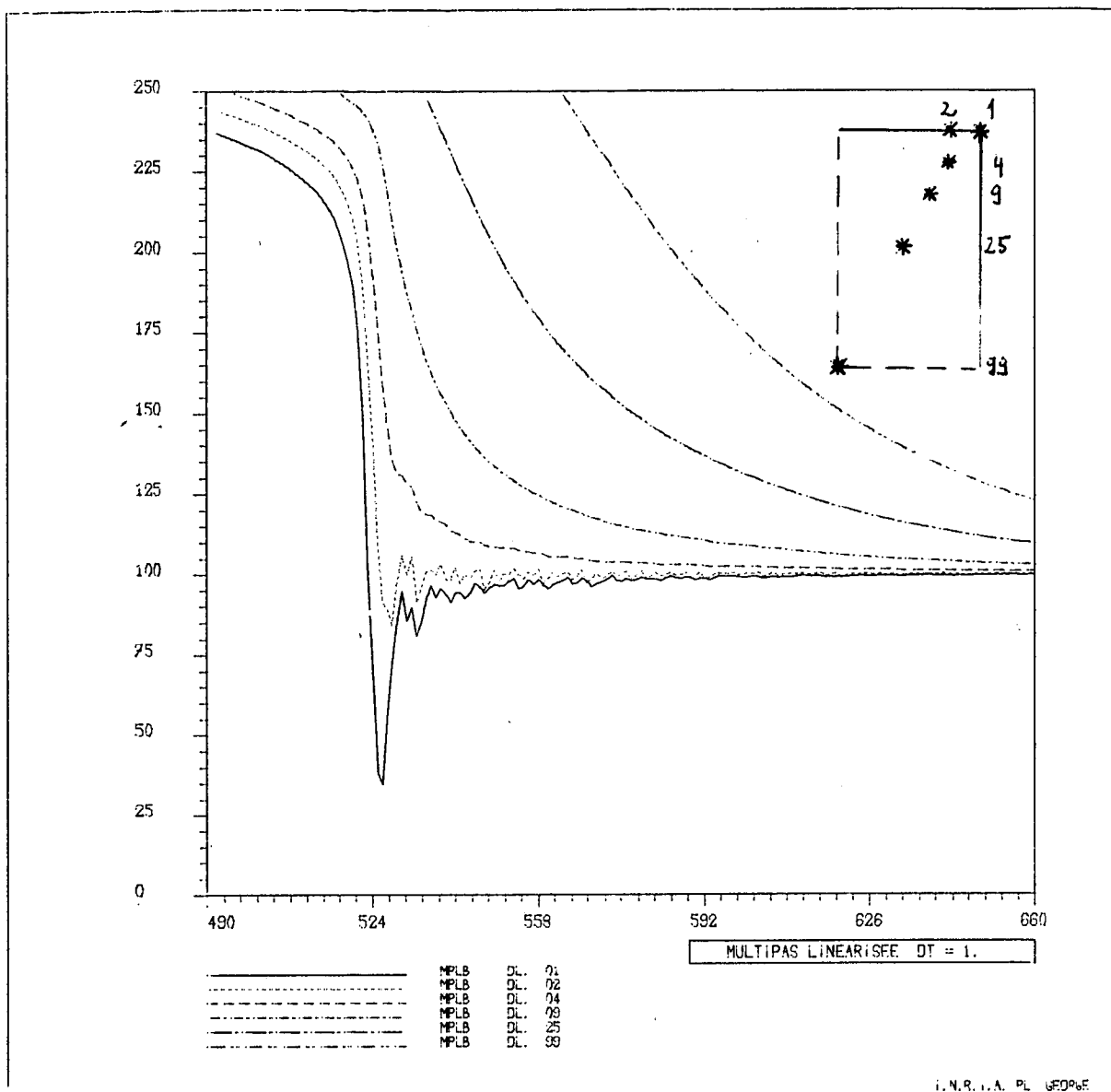


Figure 22.

### ii) Méthode multipas itérative :

Pour cette méthode le problème du choix du pas de temps  $\Delta t$  s'est révélé crucial.

De nombreux essais infructueux ont été réalisés avec les valeurs suivantes :  $\Delta t = 2.5$  1.25 1. 0.5 et 0.25 secondes.

Même pour cette dernière valeur le cycle itératif ne converge pas en 10 itérations. Des considérations de coût (temps calcul et temps "ingénieur") nous ont donc conduit à abandonner cette méthode qui s'était montrée bonne dans l'étape 1 et 2 mais est impraticable dans cette étape 3.

## 6.2.2. Méthode automatique de Gear :

i) Grille 9x11 - interpolation P1 :

La mise en oeuvre de cette méthode est très simple, un seul essai a été suffisant (à rapprocher de 6.21. ii).

Le temps calcul nécessaire est de : 9160 secondes pour parcourir l'intervalle en 1438 pas, soit un pas moyen de : 0.55 secondes.

Les résultats sont présentés sur les figures 23 et 24 qui visualisent les températures aux mêmes points que les figures 21 et 22 respectivement.

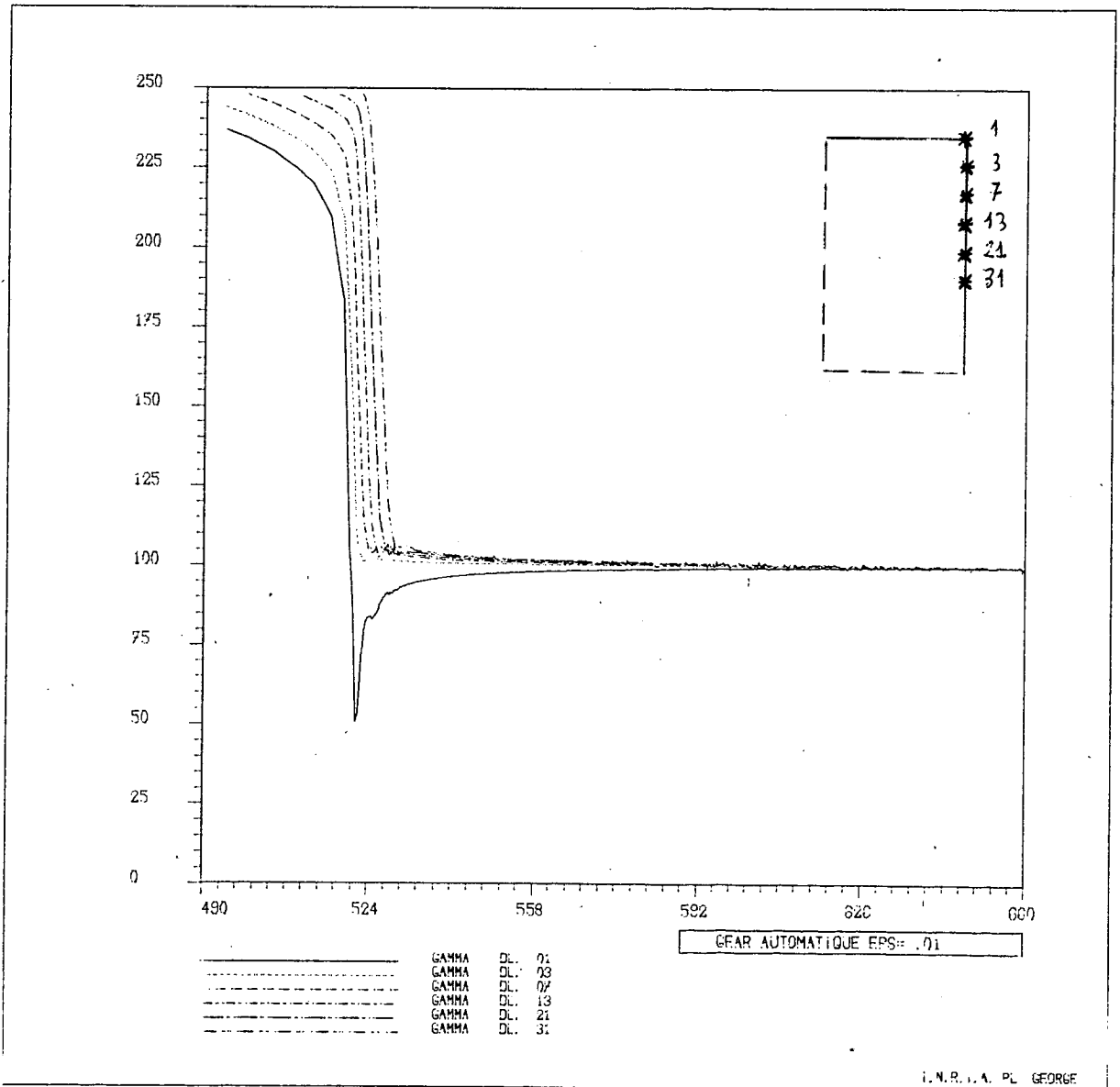


Figure 23.

Les points de la frontière ne présentent pas d'oscillations hormis le coin du barreau.

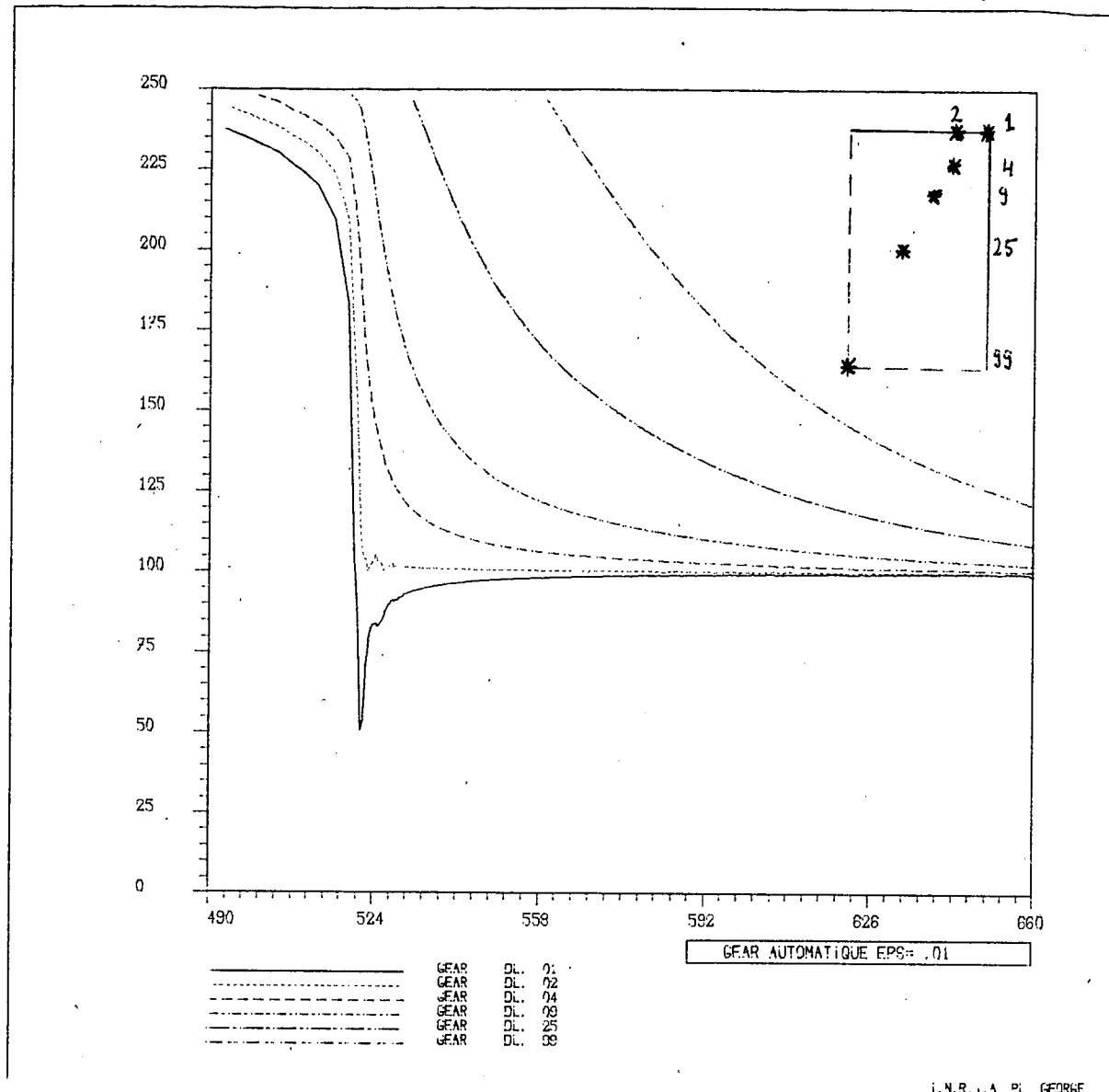


Figure 24.

La courbe de température des points internes est très régulière.

On remarque néanmoins sur ces 2 dessins que le coin et ses 2 voisins présentent un choc "non physique" qui est toutefois moins important que celui obtenu par les méthodes multipas.

Ceci nous amènera à utiliser plus loin une grille plus fine pour le maillage.

Pour cette méthode le coût est important en temps machine, il faudrait nuancer cette remarque compte tenu du temps nécessaire pour la méthode multipas prise pour un pas de temps  $\Delta t$  comparable. Le temps "ingénieur" lui est proche de zéro ce qui plaide en faveur de cette méthode.



## ii) grille 5x6 - interpolation P2 :

Il nous a paru intéressant de comparer pour ce problème les interpolations P1 et P2 à nombre de degrés de liberté égal.

Le dessin 25 présenté ces comparaisons :

- le point 1 est le coin (courbes 1 et 4)
- le point 3 est son voisin sur la frontière (courbes 2 et 5)
- le point 9 est un point interne (courbes 3 et 6)

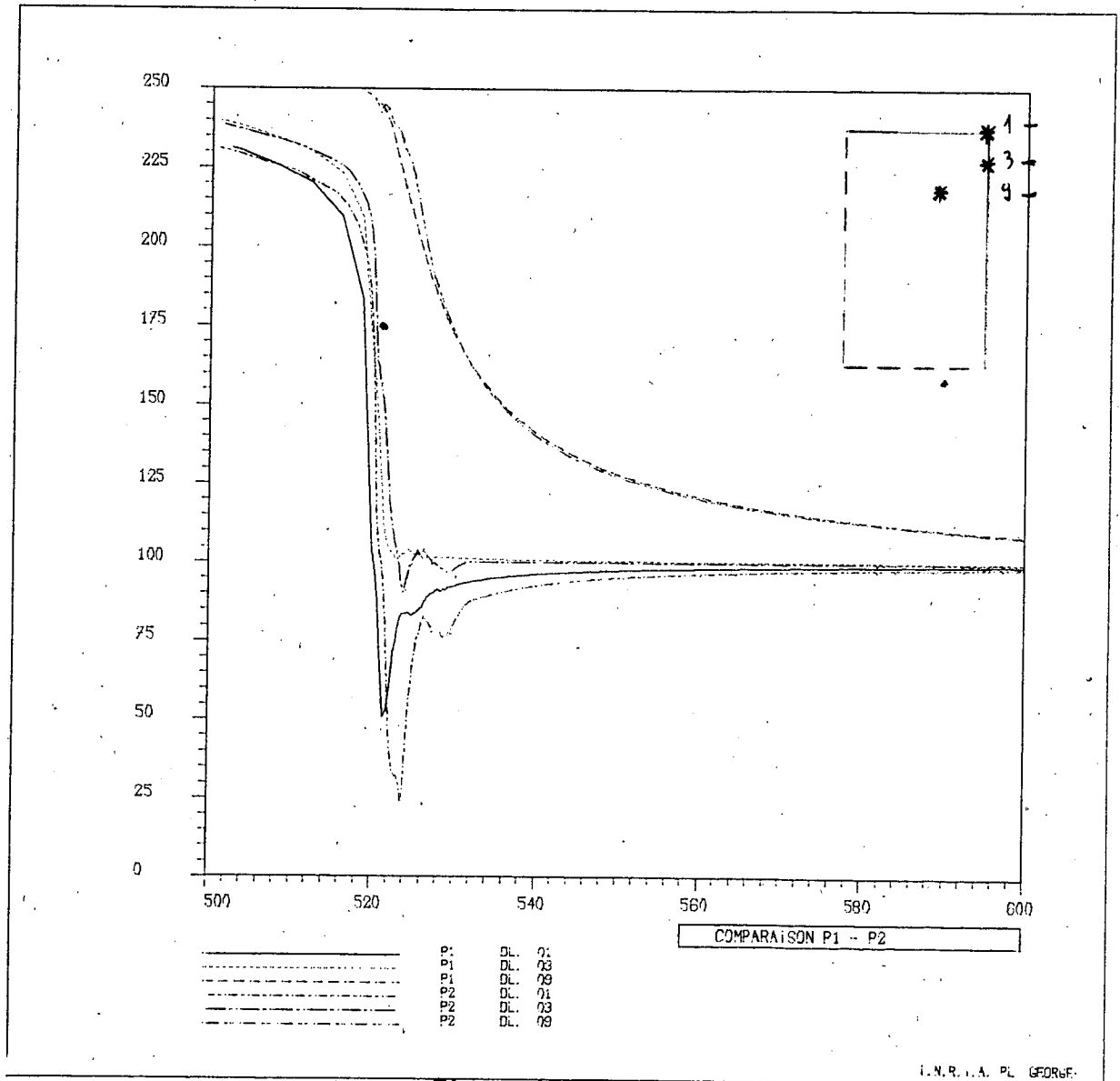


Figure 25.

Les résultats sont sans surprise : l'interpolation P2, à nombre de degrés de liberté égal, encaisse plus difficilement le choc thermique ; les temps calculs étant identiques.

## iii) grille 13x15 - interpolation P1 :

On construit une grille régulière 13x15 de telle sorte que l'on retrouve sur ce maillage certains noeuds de la grille 9x11 précédente. Des comparaisons sont alors possibles.

La figure 26 visualise les courbes de températures de 3 de ces points communs.

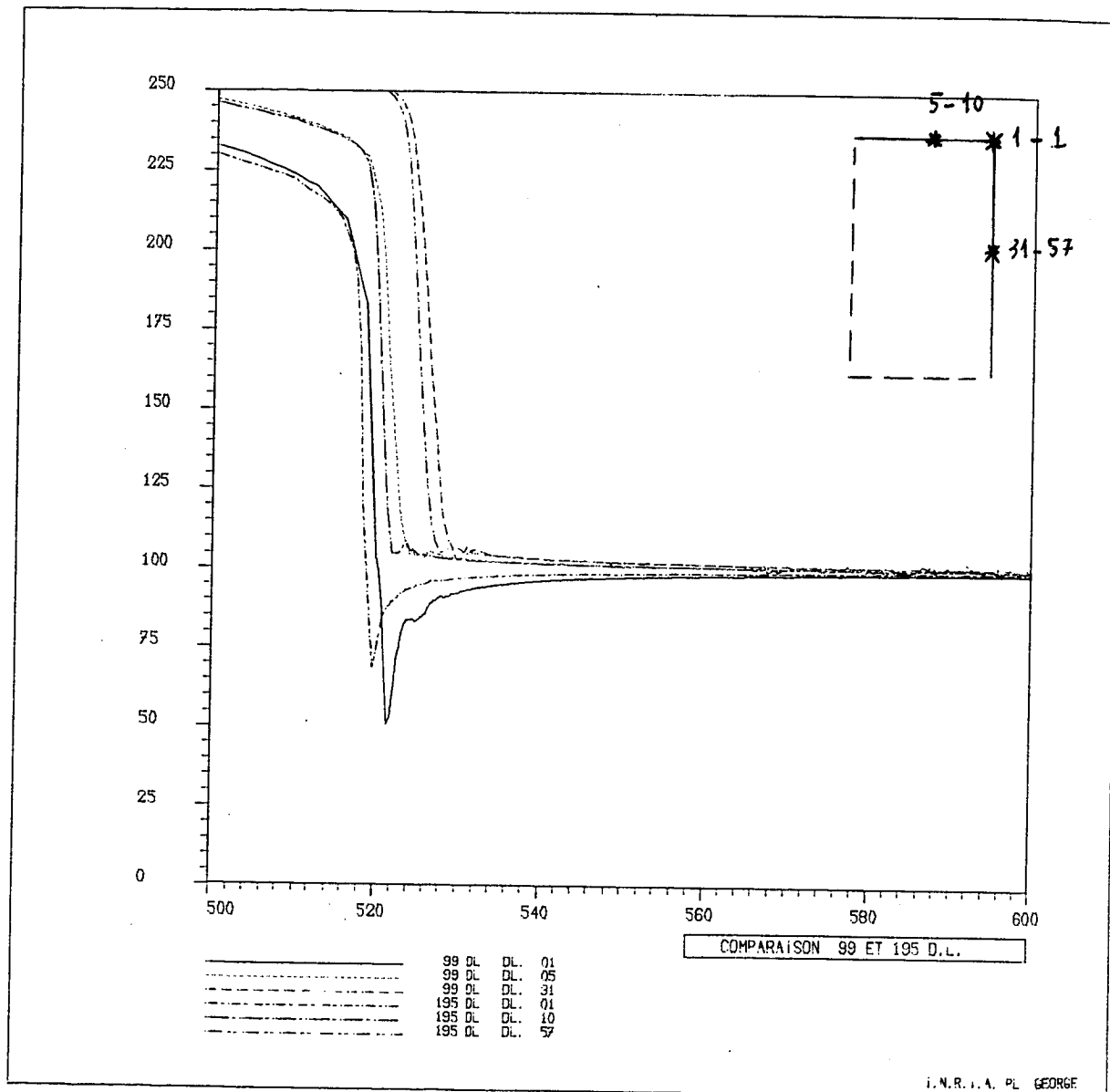


Figure 26.

Les résultats sont comparables pour les couples de points frontaliers mais éloignés du coin. Pour le coin le maillage plus fin rend mieux compte du phénomène et lisse l'aberration présente dans ce cas.

Pour les points non frontaliers les deux maillages donnent les mêmes résultats.

## 7. Conclusions générales

### 7.1. Problème relativement simple :

La méthode de Gear donne des résultats satisfaisants sans perte de temps pour l'utilisateur, le temps calcul est néanmoins assez élevé.

La méthode multipas fournit des courbes de températures comparables à condition de choisir un pas de temps assez fin. Le temps utilisateur est affecté par la nécessité de faire plusieurs tests, le temps machine, vu la simplicité de la méthode, reste inférieur ou voisin de celui nécessaire à la méthode de Gear.

### 7.2. Problème plus raide :

Compte-tenu de l'incertitude sur le choix nécessaire de la taille du pas de temps, les méthodes multipas sont difficiles à utiliser aux vues de leur faible garantie sur la précision de la solution.

La méthode de Gear est alors très performante, un seul passage permettant de traiter le problème.

Le choix de la finesse du maillage et de l'interpolation est classique pour ce genre de problème. L'interpolation P1 permet de mieux traiter la non linéarité, le maillage devra être plus fin si le problème est plus raide.

### 7.3. Développements possibles :

Dans les 2 méthodes la résolution est basée sur un traitement des matrices sous forme profil et une factorisation de type Cholesky. On peut envisager d'autres moyens de résolution en particulier des méthodes de gradient conjugué avec préconditionnement (le "prédicteur" permettant cette dernière opération) ou des méthodes de type relaxation.

Bibliographie :

- [0] J.C. METRAL ENSMIM, Laboratoire de Métallurgie de NANCY.
- [1] D. BEGIS, A. PERRONNET, "Présentation du Club Modulef" Mai 1981.
- [2] P.A. RAVIART, "Méthode multipas" Cours 3ème cycle, PARIS VI.
- [3] P.A. RAVIART, "Multistep methods and parabolic equations" PARIS VI.
- [4] P.G. CIARLET, "Introduction à l'analyse numérique de la méthode des éléments finis"
- [5] P.L. GEORGE, "Résolution numérique de problèmes évolutifs", Thèse de 3ème cycle, PARIS IV, 1980.
- [6] C.W. GEAR, "Numerical initial value problems in O.D.E.", Prentice Hall, N.Y. 1971.
- [7] C.W. GEAR, "The automatic integration of O.D.E.", ACM, 1971.
- [8] C.W. GEAR, "Communication personnelle", 1981.

